目　录

第五章 分子光学

第一章　几何光学

§1. 费马原理

如果有两种折射率为 n_1 和 n_2 的均匀、各向同性的媒质 M_1 和 M_2，那么斯涅耳定律

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad [1.1]$$

成立。(参见图 1.1)在 $n_1/n_2>1$ 的情况下，θ_1 增大时，将达到某点，如果 θ_1 再增大，则 θ_2 就不再有实解。在由 $\sin\theta_1^{(t)}=n_2/n_1$ 所定义的临界角，折射光平行于 M_1 和 M_2 的界面前进。实验表明 $\theta_1>\theta^{(t)}$时，发生全反射。然而，无论是否全反射，总有一些反射发生。除折射光线外，还有反射光线；即，原来的光线分裂为二。对于反射光线，我们有定律：

$$\theta_1'=\theta_1. \qquad [1.2]$$

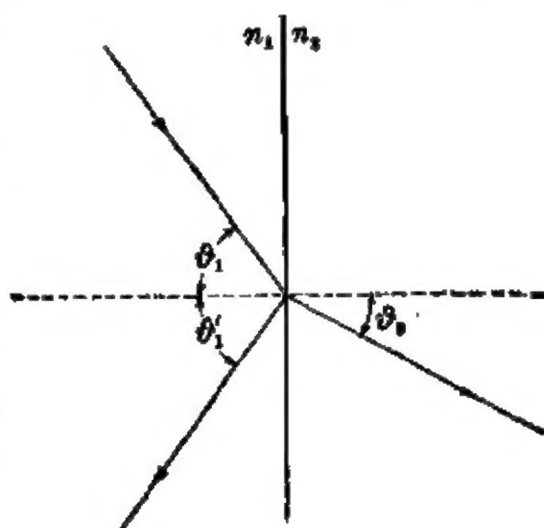


图 1.1

折射光线以及反射光线都在入射面内。

折射率与入射角无关是各向同性媒质的特征。另一方面，应注意 n 与光的颜色有关。按定义，在真空中，对所有颜色的光$n=1$。因此，在物质媒质中，n 一般大于 1。

折射定律和反射定律一样，都能用一种致极性质加以表征。如果我们用光程 L表示折射率与光线通过的路径的乘积，

$$L=n_1P_1Q+n_2P_2Q, \qquad [1.3]$$

那么费马原理说：光线总是以

$$\delta L = 0 \qquad [1.4]$$

的方式前进。这定律与上面的折射定律和反射定律等效。

［证明］ *a*. **折射定律**

由图1.2我们看出

$$L = n_1 a_1/\cos\theta_1 + n_2 a_2/\cos\theta_2,$$

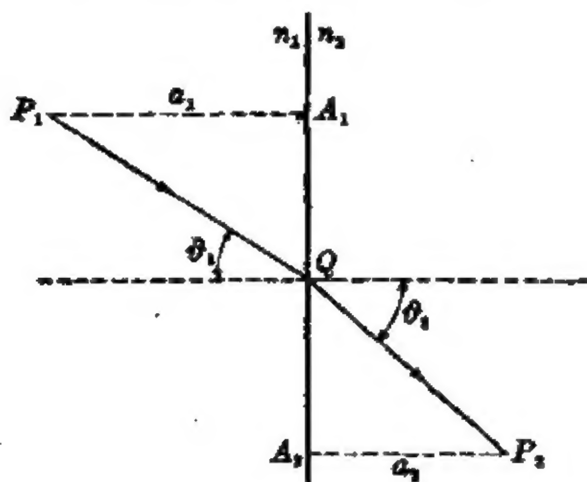


图 1.2

$A_1A_2 = a_1\tan\theta_1 + a_2\tan\theta_2 =$ 常数（辅助条件）。用拉格朗日乘子法，对 θ_1 和 θ_2 的任意变分，我们得到

$$\delta L + \lambda\delta(A_1A_2) = 0.$$

这样，

$$a_1\left(\frac{n_1\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1} + \lambda\frac{1}{\cos^2\theta_1}\right)\delta\theta_1 + a_2\left(\frac{n_2\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2} + \lambda\frac{1}{\cos^2\theta_2}\right)\delta\theta_2 = 0,$$

所以，

$$n_1\sin\theta_1 + \lambda = 0,$$

$$n_2\sin\theta_2 + \lambda = 0.$$

从这些方程式中消去 λ，得

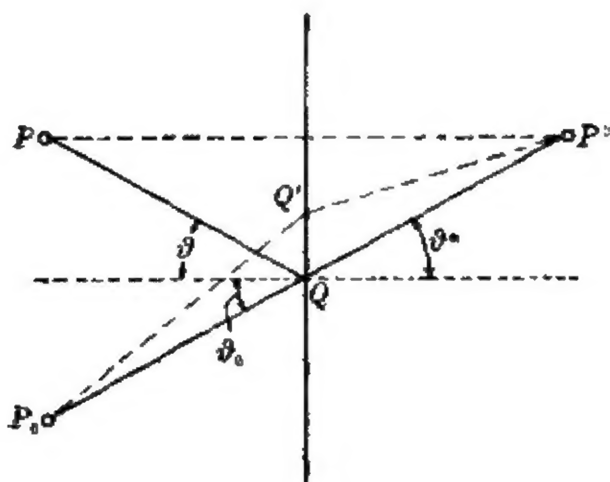


图 1.3

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2.$$ [证毕]

b. 反射定律

如果 P^* 是 P 的象，那么无需计算便可看出(参看图 1.3)

$$P_0Q'+Q'P^*>P_0Q+QP^*.$$

所以，光程是极小。

[证毕]

对于弯曲的表面，光程不必是极小；只需要是极值。以后，我们将看到，由于光速正比于 $1/n$，那末光程正比于光线的通过时间。这样，按照费马(原理)，这个量应是极值。然而，仅当考虑波动光学时，通过时间的概念才有意义。

如果我们现在考虑具有连续可变折射率 $n=n(x,\ y,\ z)$ 的媒质，那么对这种情况，我们也不难公式化费马原理；对应于[1.4]式，我们可把原理表达如下：在固定点 P_1 和 P_2 之间，光线这样行进：

$$\delta S\equiv\delta\int_{P_1}^{P_2}n\mathrm{d}s=0\qquad(P_1,P_2\text{ 固定}).\qquad[1.5]$$

如果 u 是表征给定曲线的参数，那么

$$S=\int_{u_1}^{u_2}n\left[\sum_i\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u,$$

其中

$$x_i = x_i(u) + \delta x_i(u) \qquad (i=1,2,3)$$

是一条邻近曲线，并且 P_i 对应于 $x(u_i)$. 那么,

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \sum_k \left\{ \frac{\partial n}{\partial x_k}\text{①} \delta x_k \left[\sum_i \left(\frac{dx_i}{du} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + n \frac{dx_k}{du} \frac{d}{du}(\delta x_k) \cdot \left[\sum_i \left(\frac{dx_i}{du} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} du.$$

这里，我们已用到微分 δ 和 d 是互相独立的事实，所以 $\delta dx = d\delta x$。如果把最后公式的第二项分部积分，便有

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \sum_k \left\{ \frac{\partial n}{\partial x_k} \left[\sum_i \left(\frac{dx_i}{du} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{du} \left(n \frac{dx_k}{du} \left[\sum_i \left(\frac{dx_i}{du} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right) \right\} \delta x_k du + \sum_k n \frac{dx_k}{du} \left[\sum_i \left(\frac{dx_i}{du} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \delta x_k \Big|_{P_1}^{P_2}.$$

因为假定 P_1 和 P_2 是固定的，因此 $\delta x|_{P_1} = \delta x|_{P_2} = 0$，并且最后一项为零。然而，仅当上式中被积函数恒等于零时，δS 才能对 δx_k 的其它任意选择等于零。如果选择参数 u 等于沿致极曲线的弧长 s，并用矢量记法，那么这导致条件

$$\text{grad} n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right). \qquad [1.6]$$

可能这样想，在整个推导过程中，参数 u 是不必要的，从开始便可以设它等于 s。然而，却不能这样做，因为虽然人们当然能沿致极曲线选取 $u=s$，却不能同时沿变更的比较曲线这样做。

现在，如果限定在 P_1 与 P_2 间的曲线仍为致极曲线的条件下，研究对应于端点 P_1 和 P_2 改变时 S 的变分，便有

① 德文原本把 n 误为 u——中译者注

$$\delta S = n\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\delta\boldsymbol{x}\right)\Big|_{P_1}^{P_2}. \qquad [1.7]$$

这里，费马原理也仅说明光程$\int n\mathrm{d}s$应是极值；而没有详细说明是怎样的极值。后面的问题在物理学上是全然无足轻重的。

如果把[1.6]式再分解成两部分，那么应当指出，得不到三个独立的方程式。由于

$$\sum_k\left(\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1,$$

方程式间必然存在一个关系。展开[1.6]式，得到

$$\mathrm{grad}n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} + n\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2}.$$

如果取$\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s$与[1.6]式的标积，便有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathrm{grad}n &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2}n,\end{aligned}$$

所以$(\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s)\cdot\mathrm{grad}n = \mathrm{d}n/\mathrm{d}s$，这在几何上是理所当然的，而且无其他含义。由此得知，只有矢量的分量才有物理意义。

著名的弗莱纳公式之一是$\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s^2 = \boldsymbol{e}/R$，其中$\boldsymbol{e}$是在密切面内的单位矢量，并且垂直于$\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s$，$R$是曲率半径。于是得到

$$\left.\begin{aligned}&(\mathrm{grad}n)_\perp = \frac{n}{R}\cdot\boldsymbol{e}\\ \text{或}\quad&\\ &\{\mathrm{grad}(\ln n)\}_\perp = \frac{\boldsymbol{e}}{R}\end{aligned}\right\}. \qquad [1.8]$$

在n仅为一个坐标的函数(例如$n(x)$)的特殊情况下，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)=0,$$

所以

$$n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\text{常数}, \qquad n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\text{常数},$$

并且光线保持在 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z=$ 常数的平面内。然而，可以这样选取坐标系，使得光线是在 x-y 平面内。那么

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=0, \qquad n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\text{常数},$$

$$\theta=\measuredangle\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}, x\right), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sin\theta,$$

所以得到

$$n\sin\theta=\text{常数}.$$

于是，再次得到斯涅耳定律。

由这里发展起来的方程组(具有给定初始条件的二阶微分方程组)，清楚地看出，在这种理论结构中，光线决不能分裂成两部分。如果指定了点和初始方向，那么，光线以后的行程便完全被确定了。然而，这和光线在两种媒质的界面总发生分裂这一事实不相符合。由此可见，费马原理只能是现实的某种近似。

§2. 马吕斯和惠更斯原理。成象定律

现在我们想研究函数 S 的性质，其中

$$S=\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s=S(P_1, P_2).$$

由[1.7]式，得

在 P_1 处，

$$\operatorname{grad}S\cdot\delta\boldsymbol{x}=-n\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\delta\boldsymbol{x}\right),$$

在 P_2 处，

$$\operatorname{grad}S\cdot\delta\boldsymbol{x}=n\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\delta\boldsymbol{x}\right),$$

所以有

$$\operatorname{grad} S = \mp n \frac{d\boldsymbol{x}}{ds} \qquad [2.1]$$

和

$$|\operatorname{grad} S|^2 = n^2. \qquad [2.2]$$

这个最后的方程常称为程函方程，S 称为程函。这些名称在文献中不总是唯一的。

可以用下列方式引进一个相关的函数 $\bar{S}$ 代替函数 S：令 F 是空间中任意指定的曲面，

$$x_k^0 = \varphi_k(u, v) \quad \text{或} \quad F(\boldsymbol{x}^0) = 0,$$

并令 P 是曲面外一点。那么

$$\bar{S} = \bar{S}(F, P) = \int n ds,$$

其中要取垂直于 F 并通过 P 点的光线作为 F 和 P 间的积分路线。以上的普遍变分公式[1.6]式和[1.7]式，于是暗示

$$\delta \bar{S} = \int_{P_0}^{P} \left\{ \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{ds}\left(n \frac{d\boldsymbol{x}}{ds} \right) \right\} \cdot \delta \boldsymbol{x} ds + n \frac{d\boldsymbol{x}}{ds} \cdot \delta \boldsymbol{x} \Big|_{P_0}^{P}.$$

这里，因为取致极曲线为积分路线，故第一项等于零；因为边界条件的缘故，在下限处第二项等于零。这样，作 P 点的变分，便有

$$\operatorname{grad}_P \bar{S} = n \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}. \qquad [2.3]$$

这是马吕斯定律。用文字表达是：如果光线曾一时正交于曲面 F，那么，总是存在一些正交于光线的曲面，即 $\bar{S}$ = 常数的曲面。

S 与 $\bar{S}$ 之间存在一个重要的几何关系叫做惠更斯原理：曲面 $\bar{S}$ = 常数是与 F 的每一点 P_0 相关联的曲面 $S(P_0, P)$ = 常数的包络(面)。

[证明]

令 u, v 是曲面参数。用标准方法，通过对参数求导，得到曲面 S = 常数的包络方程：

$$\frac{\partial S}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial S}{\partial v}=0,$$

所以

$$\mathrm{grad}_{P_0} S\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}=0, \qquad \mathrm{grad}_{P_0} S\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}=0,$$

由此得到，恰好是那些正交于给定曲面的光线穿过包络(面)。

［证毕］

描述各向同性媒质中的现象时有两种可能性。我们希望进一步研究方程

$$\mathrm{grad}n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)$$

和

$$|\mathrm{grad}S|^2=n^2$$

间的联系。曾经指出，由常微分方程[1.6]的解，能组成偏微分方程[2.2]的解。然而，反过来也是正确的：由[2.2]式的足够普遍的解，便能得到[1.6]式的解。

我们考察双参数曲面族 $F(\boldsymbol{x}^0, a_1, a_2)=0$① 和对应函数

$$\bar{S}(F,P)=\bar{S}(P,a_1,a_2),$$

由于[2.3]式，$\bar{S}(F,P)$ 也满足方程式[2.2]。对 a_1 和 a_2 微分，得到

$$\nabla\bar{S}\cdot\nabla\frac{\partial\bar{S}}{\partial a_1}=0, \qquad \nabla\bar{S}\cdot\nabla\frac{\partial\bar{S}}{\partial a_2}=0;$$

即，曲面 $\frac{\partial\bar{S}}{\partial a_1}=$ 常数与 $\frac{\partial\bar{S}}{\partial a_2}=$ 常数正交于曲面 $\bar{S}=$ 常数。如果假定这样选取双参数曲面族 F，使得曲面 $\frac{\partial\bar{S}}{\partial a_1}=$ 常数和 $\frac{\partial\bar{S}}{\partial a_2}=$ 常数不重合，那么，它们相交形成一条曲线，后者正交于 $\bar{S}=$ 常数，并且平行于 $\nabla\bar{S}$。这曲线是光线方程的解。这点可以看出如下。如果我们

① 德文原本中有删去这前半句的符号。——中译者注

写$\frac{\partial \bar{S}}{\partial a_i}=b_i$，那么这种曲线的方程变成

$$x_k=f_k(s, a_1, a_2, b_1, b_2).$$

记住 $\nabla\bar{S}$ 是平行于 $\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}$ 的，并用[2.2]式，我们可以写 $\nabla\bar{S}=n\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}$，由此得到

$$n\frac{d}{ds}\left(n\frac{dx_i}{ds}\right)=n\sum_k\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{S}}{\partial x_i}=\sum_k\frac{\partial\bar{S}}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{S}}{\partial x_k\partial x_i}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}\sum_k\left(\frac{\partial\bar{S}}{\partial x_k}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}n^2\right)=n\frac{\partial n}{\partial x_i},$$

所以

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right)=\text{grad}n,$$

正是[1.6]式。 [证毕]

这种计算表明，全微分方程和与其相缔合的偏微分方程之间有一个十分重要的特殊关系。这种关联以后将大大地推广。这些关系首先是被哈密顿发现的。

作为变分原理的一个应用，这里将讨论有关曲面使用宽光线锥精密成象的几个定理。

a. 用方向的一维簇构成一维点簇的象

不带撇的表示物空间的量，带撇的表示象空间的量。从 P 发出的所有光线以某种方法会聚于 P' 点，类似地，从 Q 点发出的光线会聚于 Q' 点；此外，它们与 $\overrightarrow{PQ}=\delta\boldsymbol{x}$ 同在一平面内。如果用 $\boldsymbol{t}$ 表示光线的单位切向矢量，那么，由[1.7]式，变分定律说

$$\delta S=S(P, P')-S(Q, Q')$$
$$=n(\boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{x})-n'(\boldsymbol{t}'\cdot\delta\boldsymbol{x}').$$

这样，用 $|\delta\boldsymbol{x}|=\delta l$，有

$$\delta S=n\delta l\cos(\boldsymbol{t}, \delta\boldsymbol{x})-n'\delta l'\cos(\boldsymbol{t}', \delta\boldsymbol{x}').$$

这方程式的右端必须与光线锥中所考虑的是哪条光线无关。如果

用 $\boldsymbol{t}_1$ 和 $\boldsymbol{t}_2$ 表示光线锥中的两根光线，那么，可以推断，

$$n\delta l\{\cos(\boldsymbol{t}_1, \delta\boldsymbol{x}) - \cos(\boldsymbol{t}_2, \delta\boldsymbol{x})\}$$
$$= n'\delta l'\{\cos(\boldsymbol{t}_1', \delta\boldsymbol{x}') - \cos(\boldsymbol{t}_2', \delta\boldsymbol{x}')\}.$$

可以写成矢量形式

$$n(\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2)\cdot\delta\boldsymbol{x} = n'(\boldsymbol{t}_1' - \boldsymbol{t}_2')\cdot\delta\boldsymbol{x}', \qquad [2.4]$$

这是布龙斯(Bruns)定律。按照推导，这定律当然仅适用于足够小的 $\delta\boldsymbol{x}$。

b. 用方向的二维簇构成二维点簇的象

记号和 *a* 中相同。此外，令 E 是 $\delta\boldsymbol{x}$ 的平面，并且 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\boldsymbol{t}$ 在 E 中的投影。那么，

$$\boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{x},$$

并且，由 *a*，得到

$$n(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2)\cdot\delta\boldsymbol{x} = n'(\boldsymbol{\tau}_1' - \boldsymbol{\tau}_2')\cdot\delta\boldsymbol{x}',$$
$$n(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_3)\cdot\delta_1\boldsymbol{x} = n'(\boldsymbol{\tau}_1' - \boldsymbol{\tau}_3')\cdot\delta_1\boldsymbol{x}',$$

此外，其中各个 $\boldsymbol{\tau}$ 已这样选取，使得 $\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2$，和 $\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_3$ 不是平行的。对 $\delta\boldsymbol{x}$ 和 $\delta_1\boldsymbol{x}$ 也一样。按熟悉的恒等式

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}),$$

得到

$$(\delta\boldsymbol{x}\times\delta_1\boldsymbol{x})\cdot[(\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1)\times(\boldsymbol{\tau}_3 - \boldsymbol{\tau}_1)]$$
$$= [\delta\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1)][\delta_1\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}_3 - \boldsymbol{\tau}_1)]$$
$$- [\delta_1\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1)][\delta\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}_3 - \boldsymbol{\tau}_1)].$$

用 n^2 乘此式，并用上面得到的恒等式，我们发现表达式

$$n^2([\delta\boldsymbol{x}\times\delta_1\boldsymbol{x}]\cdot[(\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1)\times(\boldsymbol{\tau}_3 - \boldsymbol{\tau}_1)])$$

等于带撇量的同样表达式。最后的表达式中出现的第一个矢量积的几何意义是由 $\delta\boldsymbol{x}$ 与 $\delta_1\boldsymbol{x}$定义的面积元。然而，第二个矢量积的意义是由光线 $\boldsymbol{t}_1$，$\boldsymbol{t}_2$ 和 $\boldsymbol{t}_3$(对足够小的 $\Delta\boldsymbol{\tau}$)定义的立体角 $d\Omega$ 的二次投影曲面面积。由此得到

$$n^2 \mathrm{d}f \mathrm{d}\Omega \cos(N, t) = n'^2 \mathrm{d}f' \mathrm{d}\Omega' \cos(N', t'), \qquad [2.5]$$

其中 N 是曲面 $\mathrm{d}f$ 的法线。这方程式叫做基尔霍夫-克劳修斯定律。

c. 把两个定理应用于旋转对称系统

1. 设用一有限张角为 $2u$ 且包含轴光线的光线锥使垂直于对称轴的曲面成象为相似形状的曲面。

考虑通过轴的一个截面。用 y 代替 δx 并以 t_1 和 t_2 作为光线锥的最外边的光线，运用[2.4]式，我们得到重要的正弦条件：

$$ny \sin u = n' y' \sin u'. \qquad [2.6]$$

无论何时，只要已作的几何假设能适用，这条件总是满足的。由[2.5]式基尔霍夫定律也能导出正弦条件。

2. 用张角为 $2u$ 的光线锥使轴的各段成象。取 t 为光线锥的最外光线，t_2 为轴光线，那么由[2.4]式得到

$$nl(1-\cos u) = n'l'(1-\cos u'). \qquad [2.7]$$

一般说来，条件[2.6]和[2.7]不能两者都被满足。仅在 $u=u'$，$ny=n'y'$ 和 $nl=n'l'$ 时，这才可能。实际上（对透镜来说）不是这样。然而，当 u 和 u' 很小时，两个条件都能近似地被满足。

d. 在连结严格被成象点的线是光线本身的平面内，用平面内的光线对平面成象①

令 P_1, P_2 和 P_3 为严格被成象的点。由[2.7]式，得到

$$nl_{12}(1-\cos u) = n'l'_{12}(1-\cos u').$$

另一方面，我们也有

$$nl_{13}(1-\cos u) = n'l'_{13}(1-\cos u')$$

和

$$nl_{23}(1-\cos v) = n'l'_{23}(1-\cos v'),$$

① 德文与英文本中均为曲面，都未明确为平面。——中译者注

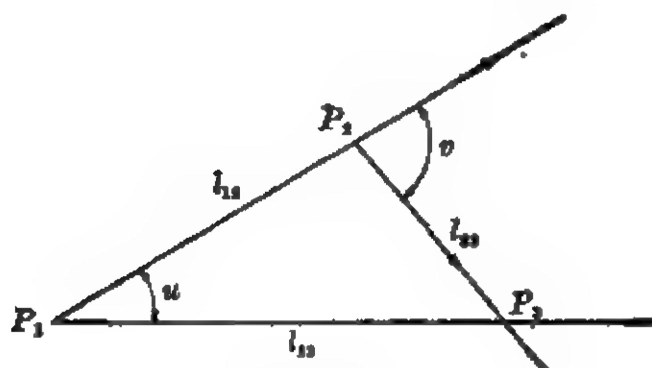


图 2.1

所以

$$l_{12}:l_{13}:l_{23}=l'_{12}:l'_{13}:l'_{23}.$$

这样,三角形是相似的,所以它们的对应角相等:

$$u=u',\ \ v=v',\ \ nl=n'l'.$$

§3. 哈密顿理论

a. 特殊齐次形式(各向同性体)

在几何光学中,我们已熟知费马的基本致极原理

$$\delta\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s=0.$$

另一方面,我们知道,在质点力学中,由致极原理

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{2m(E-V(x))}\mathrm{d}s=0 \qquad [3.1]$$

确定质点轨道。因此,如果我们设 $n^2=2m(E-V)$,那么我们得到一个力学方程与光学方程之间的变换方案,使得每个光学问题有一个力学问题与之相关联。然而,这种类似不是对现象的时间变化而言,而是把势场中有给定初能量的质点的轨道与在指定折射率(作为位置的函数)的媒质中的光线联系起来。

这样,在光学中和在力学中一样,[1.5]式的致极原理能表达为正则形式。如果我们令

$$\boldsymbol{p}=n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s},\qquad [3.2]$$

则

$$\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}=n.$$

以 v 作参数，则得

$$0=\delta S=\delta\int n\mathrm{d}s=\delta\int\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\delta\int\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v$$

$$=\int\left\{\delta\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}+\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\delta\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}v=\int\left(\delta\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}v}\cdot\delta\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}v$$

$$+\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{x}\Big|_{P_1}^{P_2}.$$

然而，现在必须注意 $\delta\boldsymbol{x}$ 和 $\delta\boldsymbol{p}$ 不再能独立地改变了。由于[3.2]，我们必定有

$$\delta G=0,\quad 其中\ G=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2-n^2).\qquad [3.3]$$

那么，用拉格朗日乘子法，由 $\delta S=0$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}=\lambda\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{p}},\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}v}=-\lambda\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{x}}.$$

或者，代换后有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}=\lambda\boldsymbol{p},\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}v}=\lambda n\frac{\partial n}{\partial\boldsymbol{x}}.\qquad [3.4]$$

显然，这些是和[3.2]式一样的方程组。通过比较，得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}\right)^2=\lambda^2n^2,\quad 由此得到\ \lambda n=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}.$$

代入[3.4]式，便得出正则方程

$$n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{p},\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial n}{\partial\boldsymbol{x}}.\qquad [3.5]$$

从这两个方程中消去 $\boldsymbol{p}$，便得到熟悉的光线方程[1.6]。在这种类似的基础上，一切事件都自然而精确地如同在力学中那样进

行。如果令$n^2=2m(E-V)$，那么通过代换不难验证，p变为机械动量，并且$\delta G=0$变成能量守恒定律。

此外，我们注意到，数学上三维性在计算中不起任何作用。事实上，我们知道，全部形式工作在N个质点的力学（其中有$3N$维）中能以完全同样的方式来完成。然而，在光学中只出现三维。

b. 最普遍的齐次形式（晶体光学）

此外，也可以看出，$\delta\int n\mathrm{d}s=0$中的函数$n$的特定形式是不重要的。这样，在完全普遍的情况下，我们将令

$$\delta S=\delta\int_{P_1}^{P_2}L\mathrm{d}u=0, \qquad [3.6]$$

其中u是任意参数，并且L是满足下列条件的函数：

$$L=L\Big(q_1,\ \cdots,\ q_{f+1},\underbrace{\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}u}}_{q_1'},\cdots,\underbrace{\frac{\mathrm{d}q_{f+1}}{\mathrm{d}u}}_{q_{f+1}'}\Big),$$

和

$$L(q_1,\cdots,q_{f+1},\lambda q_1',\cdots,\lambda q_{f+1}')=\lambda L(q_i,q_i'). \qquad [3.7]$$

[3.7]式的要求是必要的，因为参数u是完全任意的，并且必须要求变分原理[3.6]式对于更换参数是不变的。（验算一下！）① 在光学的情况中，我们有$f=2$。对应于[3.7]式的欧勒齐次性关系是

$$\sum q_k'\frac{\partial L}{\partial q_k'}=L. \qquad [3.8]$$

类似于[3.2]式，再令

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial q_k'}. \qquad [3.9]$$

由[3.8]和[3.9]式，于是得

① 德文原本有此句。——中译者注

$$L=\sum p_k q'_k, 0=\delta S=\delta\int(\sum p_k q'_k)\mathrm{d}u. \qquad [3.10]$$

因为L对q'_k是一次齐次的(按照[3.7]式)，那么p_k是零次齐次的。倘若从[3.9]中前f个方程解出$q'_k(k=1, 2, 3, \cdots, f)$，然后把这些代到[3.9]的第$(f+1)$个方程式中，那么得到形式为

$$p_{f+1}=p_{f+1}(q_1, \cdots, q_{f+1}, p_1, \cdots, p_f, q'_{f+1})$$

的关系。由于p_{f+1}对q'_{f+1}的齐次性(零次)，可以推断p_{f+1}①不能依赖于q'_{f+1}。这样，类似于[3.3]式，必然存在一个关系

$$G(p_1, \cdots, p_{f+1}, q_1, \cdots, q_{f+1})=0. \qquad [3.11]$$

变分原理[3.10]，连同辅助条件[3.11]一起，确定了光线的行程。变分成为

$$\delta\int L\mathrm{d}u=\delta\int\sum_k p_k q'_k\mathrm{d}u=\sum_k\int\left[\delta p_k\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u}+p_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\delta q_k\right]\mathrm{d}u$$

$$=\sum_k\int\left(\delta p_k\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u}-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}u}\delta q_k\right)\mathrm{d}u+p_k\delta q_k\Big|_{P_1}^{P_2} \qquad [3.12]$$

用辅助条件[3.11]最后得到

$$q'_k=\lambda\frac{\partial G}{\partial p_k}, \qquad p'_k=-\lambda\frac{\partial G}{\partial q_k}. \qquad [3.13]$$

另一方面，由[3.6]式十分普遍地得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial L}{\partial q'_k}=\frac{\partial L}{\partial q_k}.$$

(这里，没有辅助条件，因为我们用原来(数量)的变量工作而没有引进p_k等。)这样，[3.13]的最后一个式子也能写成

$$p'_k=\frac{\partial L}{\partial q_k}=-\lambda\frac{\partial G}{\partial q_k}. \qquad [3.14]$$

方程式[3.13]和[3.14]叫做正则方程(类似于[3.4]式和[3.5]式)。

---

① 英译本误为p'_{f+1}。——中译者注

这里也能考察曲面 $S=$常数(波面)，其中

$$S=\int_{P_1}^{P_2} L du.$$

如果在[3.6]式变分原理中，保持 P_1 固定，与此同时，允许 P_2 在曲面 $S=$常数上变动，那么，按结构推定必有 $\delta S=0$ (积分是沿致极曲线进行)。无论如何，由普遍变分公式[3.12]可以推断

$$\sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k'} \delta q_k=0, \quad \delta q \text{ 在 } S=\text{常数上。} \qquad [3.15]$$

这是所谓横向性条件。一般说来，这不是 $\delta S=0$, P_1 固定时的正交性关系[1.7]。这样，光线只是横过曲面 $S=$常数，而不是垂直于它。

容易构成 S 函数的微分方程。由普遍变分公式[3.12]，得到

$$\frac{\partial S}{\partial q_k}=p_k, \qquad [3.16]$$

代入[3.11]式，得出

$$G\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_{f+1}}, q_1, \cdots, q_{f+1}\right)=0. \qquad [3.17]$$

如果现在假定我们已有 [3.17] 式依赖于 f 个常数 $a_\rho(\rho=1, 2, 3, \cdots, f)$的解，那么下列定理成立：方程组

$$\frac{\partial S}{\partial a_\rho}=b_\rho \qquad [3.18]$$

确定光线。这是前面提过的全微分方程和它的缔合偏微分方程之间的关系的推广。

[证明]:

由[3.18]式，

$$q_k=\varphi_k(u, a_1, \cdots, a_f, b_1, \cdots, b_f). \qquad [3.19]$$

(其中我们默设方程组[3.18]对 q_k 是可解的；就是说，矩阵 $\partial^2 S/\partial a_\rho \partial q_k$是 f 秩的)。如果把它代入[3.16]式，便得到

$$\frac{\partial S}{\partial q_k}=p_k=\psi_k(a_1,\cdots,a_f,b_1,\cdots,b_f,u). \qquad [3.20]$$

把[3.17]式看作 q 和 a 的函数，对 a_ρ 微分时得出

$$\sum_k \frac{\partial G}{\partial p_k}\frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_\rho}=0. \qquad [3.21]$$

另一方面，由[3.18]式对 u 微分，得

$$\sum_k \frac{\partial^2 S}{\partial a_\rho \partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u}=0. \qquad [3.22]$$

这些关系仅当

$$\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u}=\lambda\frac{\partial G}{\partial p_k} \qquad [3.13\mathrm{a}]$$

时，能同时满足。类似地，由[3.17]式对 q 微分，得

$$\left.\frac{\partial G}{\partial q_k}\right|_{p\text{固定}}+\sum_l \frac{\partial G}{\partial p_l}\frac{\partial^2 S}{\partial q_l \partial q_k}=0.$$

代入$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}$(由[3.20]式)，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}u}=\sum_l \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_l}\frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}u}=\lambda\sum_l \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_l}\frac{\partial G}{\partial p_l}=-\lambda\frac{\partial G}{\partial q_k}. \qquad [3.13\mathrm{b}]$$

无论如何，由[3.18]，[3.19]和[3.20]式给出的方程式[3.17]的解满足正则方程组[3.13]①，如先前已表明那样，它们等价于光线方程。 [证毕]

这里，我们可以再考虑由下面定义的相关函数代替 S：

$$\bar{S}(P)=\int_{P_0}^{P} L\mathrm{d}u,$$

其中 P 已给定且 P_0 是在超曲面 $F(q)=$常数上。沿通过 P 并且横截曲面 $F=$常数的光线取作积分路线(条件[3.15])。再次得出惠更斯原理，其中，$\bar{S}=$常数是对应于给定曲面的点的曲面 $S=$常数的

① 即[3.13a]和[3.13b]式。——中译者注

包络(面)。(证明类似于 § 2 中用于惠更斯原理的。)

在这小节中给出的理论将用于晶体中光的传播 (参看 § 13)。应该注意的是, 在这种情况中, 仍然能够定义"波面" ($S=$常数)。虽然"波法线" $\boldsymbol{p}=\{p_1, \cdots\}$ 的确垂直于这曲面, 但一般说来, 它并不平行于光线方向 $\boldsymbol{q}'=\{q_1', \cdots\}$。

c. 哈密顿理论的非齐次形式

在变分原理[3.6]式中, 把坐标 q_{f+1} 作为参数 u 引进。那么,

$$q_k'=\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u}, \qquad \dot{q}_\alpha=\frac{dq_\alpha}{\mathrm{d}q_{f+1}}=\frac{q_\alpha'}{q_{f+1}'}. \tag{3.23}$$

指标有下列变程: $\alpha=1, 2, 3, \cdots, f$; $i, k=1, 2, 3, \cdots, f+1$. 因为 $L(q', q)$ 对 q' 是一次齐次的, 便有

$$L=\bar{L}(q_1, \cdots, q_{f+1}, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f)q_{f+1}', \tag{3.24}$$

$$L\mathrm{d}u=\bar{L}\mathrm{d}q_{f+1}. \tag{3.25}$$

于是,

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha'}=\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

并得到(由[3.23]和[3.24])

$$p_{f+1}=\frac{\partial L}{\partial q_{f+1}'}=\bar{L}-\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}\equiv -H,$$

$$H=\sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha-\bar{L}, \quad p_{f+1}+H=0. \tag{3.26}$$

引进函数 H 可以重写正则方程[3.13]。[3.26]的第二个方程起辅助条件[3.11]的作用, 所以, 从[3.13]式能消去参数 λ:

$$G\equiv p_{f+1}+H(p_\alpha, q_\alpha; q_{f+1})=0. \tag{3.27}$$

由[3.13]式

$$\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}u}=\lambda\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}u}=-\lambda\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{f+1}}{\mathrm{d}u}=\lambda, \qquad \frac{\mathrm{d}p_{f+1}}{\mathrm{d}u}=-\lambda\frac{\partial H}{\partial q_{f+1}}.$$

消去 λ，我们得到正则方程的非齐次形式

$$\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \tag{3.28}$$

此外，得到

$$\frac{\partial H}{\partial q_{f+1}}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}q_{f+1}}. \tag{3.29}$$

在非齐次情况中，也得到全微分方程，光线方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_{f+1}}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_\alpha},$$

和它的缔合偏微分方程的关联，而且的确其中要再次限定辅助条件[3.11]为[3.27]式。把 $p_k=\partial S/\partial q_k$ 代入[3.27]式，得到

$$\frac{\partial S}{\partial q_{f+1}}+H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha, q_{f+1}\right)=0.$$

这样，能确定 $S=S(q_i, a_\alpha)$，并且

$$\frac{\partial S}{\partial a_\alpha}=b_\alpha$$

再次是光线方程组。当然，照这样代换，H 也将与 f 个常数 a_α 有关。

各向同性的光学系统。非齐次形式对这些系统 ($f=2$) 是实用的。

$$\bar{L}=n(1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ 或 } \bar{L}\mathrm{d}x_3=n\mathrm{d}s,$$

$$p_\alpha=\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}_\alpha}=n\dot{x}_\alpha(1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)^{-\frac{1}{2}}=n\mathrm{d}x_\alpha/\mathrm{d}s;$$

所以

$$n^2-p_1^2-p_2^2=n^2/(1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)$$

(该式通过代换能得到验证)，并且

$$\bar{L}=n^2(n^2-p_1^2-p_2^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$H=-\sqrt{n^2-p_1^2-p_2^2}=-p_3.$$

①「我们引进特征函数 S，

$$\frac{\partial S}{\partial x_k}=p_k=n\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\qquad(k=1,2,3),$$

并施行变换

$$V(\boldsymbol{p}^0,\boldsymbol{p})=S-\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{p}^0\cdot(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{a}^0),$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^0$ 是任意的[A-1]②，并且

$$\mathrm{d}S=\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}^0.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V=&\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}^0-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}\\&+(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{a}^0)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}^0=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{a}^0)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}^0\end{aligned}$$

和

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{p}}=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),\ \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{p}^0}=\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{a}^0.」$$

我们回到非齐次形式来

$$p_3=\sqrt{n^2-p_1^2-p_2^2}=-H.$$

记下

$$\begin{aligned}&W(p_1^0,p_2^0,p_1,p_2)\\&\quad\equiv V(p_1^0,p_2^0,\sqrt{n^{0^2}-p_1^{0^2}-p_2^{0^2}},p_1,\ p_2,\ \sqrt{n^2-p_1^2-p_2^2}),\end{aligned}$$

我们有

$$\mathrm{d}W=-\sum_\alpha X_\alpha\mathrm{d}p_\alpha+\sum_\alpha X_\alpha^0\mathrm{d}p_\alpha^0,$$

并有

$$X_\alpha=x_\alpha-a_\alpha+\frac{\partial p_3}{\partial p_\alpha}(x_3-a_3)=x_\alpha-a_\alpha-\frac{p_\alpha}{\sqrt{n^2-p_1^2-p_2^2}}(x_3-a_3),$$

及 X_α^0 的类似关系。

---

① 「 」在德文原本中有修改符号，表示移到本分节各向同性的光学系统之前。——中译者注

② 评注〔A-1〕—〔A-7〕在附录中。

轴对称系统(**旋转对称**)。令 z 轴是旋转轴,我们设

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=x, & \mathrm{d}x/\mathrm{d}s=u \\ x_2=y, & \mathrm{d}y/\mathrm{d}s=v \\ x_3=z, & \mathrm{d}z/\mathrm{d}s=w \end{array}\right\}(\text{方向余弦})。$$

并沿 z 轴选取任意点 $\boldsymbol{a}^0$ 和 $\boldsymbol{a}$。

按照各向同性物体的普遍公式,

$$\frac{\partial W}{\partial u}=-nX, \qquad \frac{\partial W}{\partial v}=-nY,$$

$$\frac{\partial W}{\partial u^0}=n^0X^0, \quad \frac{\partial W}{\partial v^0}=n^0Y^0,$$

且有

$$X=x-\frac{nu}{n\sqrt{1-u^2-v^2}}(z-a)=x-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}(z-a).$$

这表明(X,Y)和(X^0,Y^0)分别表示光线与a 和 a^0 处垂直于轴的平面相交的点的坐标。

函数W和V 的几何意义从解析定义

$$W=S-n\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+n^0\boldsymbol{t}^0\cdot(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{a}^0)$$

直接得到(这里 $\boldsymbol{t}$ 是平行于光线的单位矢量)。在图 3.1 中,显然它是从 N^0 到N的光程。函数 $V(\boldsymbol{p}^0,\boldsymbol{p})$和 $W(p_1^0,p_2^0,p_1,p_2)$叫做**角程函**。

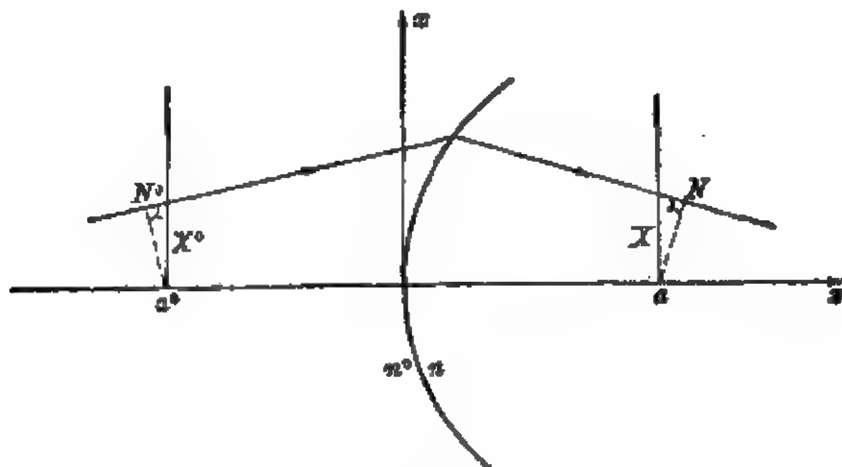


图 3.1

§4. 光度学

我们从对所有光学过程(除发射和吸收外)，总光量L是守恒的这一假设出发。当考虑以光线为界的截面时，总光量也是守恒的。从这些前提出发，朗伯和开普勒得到下面的定律。

令F为辐射(曲)面，f是辐照(曲)面。那么，$dL=Kd\Omega$，其中K是与F有关的一个常数。如果df是辐照(曲)面元，那么

$$d\Omega=\frac{df\cos\alpha}{r^2},$$

$$E=\frac{K\cos\alpha}{r^2},\quad dL=Edf. \qquad [4.1]$$

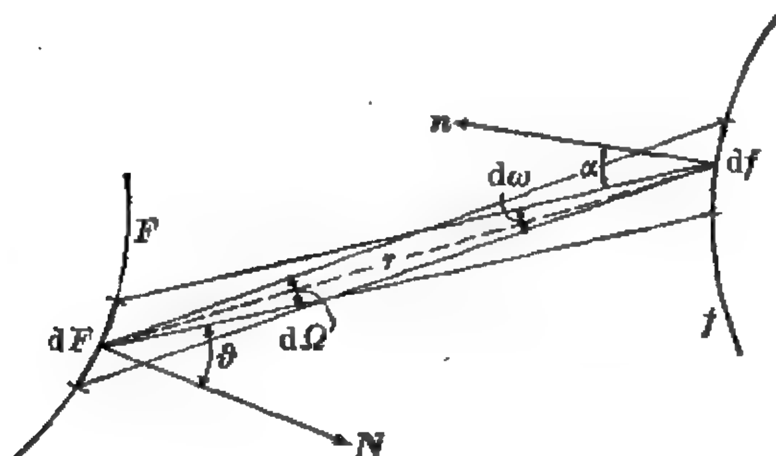


图 4.1

这样，如果两(曲)面元的E相等，则两者表现同等明亮；E叫做照度。的确，当试图对不同颜色确定同等亮度，实际上遇到很多困难①。

朗伯提出一个附加的(虽然是可疑的)定律：K依赖于光发射的方向，

$$K=IdF\cos\theta, \qquad [4.2]$$

① 参看 J. H. C. MÜLLER 和 C. S. M. POUILLET，物理教科书(Vieweg Verlag, Braunschweig, 1925—1934)，第11版，卷1—5。

其中 I 叫做比光强(或光度亮度)。由于 $I=I(\theta)$，当然可以说[4.2]式是纯粹形式的。只有在辐射为热平衡的情况下，$dI/d\theta=0$(各向同性辐射体)。发光球对眼表现成一个均匀亮度的发光盘就是这种情况。

这两个定律([4.1]式和[4.2]式)结合便得出

$$dL=IdfdF\cos\alpha\cos\theta/r^2, \qquad [4.3]$$

$$d\Omega=df\cos\alpha/r^2=\sin\theta d\theta d\varphi.$$

对常数 I，积分[4.3]式得到射进半张角为 U 的圆锥中的全部 L:

$$L=\int IdfdF\cos\alpha\cos\theta/r^2$$

$$=IdF\int_0^{U①}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi=\pi IdF\sin^2U.$$

对于 $U=\frac{\pi}{2}$，

$$L=\pi IdF.$$

严格光学成象。根据前面的讨论，通过对应面元的光量必须相等：$L=L'$。因此，

$$Idf\cos\alpha d\omega=I'df'\cos\alpha' d\omega'.$$

然而，由[2.5]式可以推断

$$n^2df\cos\alpha d\omega=n'^2df'\cos\alpha' d\omega',$$

所以

$$I/n^2=I'/n'^2. \qquad [4.4]$$

① 此处英文本误为 $\pi/2$。——中译者注

第二章　干涉和衍射理论

§5. 波的运动学

存在一些光学现象，它们与到目前为止所提供的几何光学理论相矛盾。此外，它们也不能用光的微粒说来解释。这类现象总是出现在折射率变化非常迅速(但可能连续)的地方。其中有先前考虑过的一根光线分裂为一根折射光线和一根反射光线的情形，它是一种无论如何不能用曲面不连续性的数学无穷小理论解释的现象。此外，实验物理学中所熟悉的衍射和干涉效应属于这类现象。

所有这些现象都能借助波的概念来处理，但这里暂时忽略光所特有的横向性。这理论的定量表达是由杨，菲涅耳和欧勒开创的。

a. 振动

谐振动的最简单形式是

$$x = A\cos(\omega t + \delta),$$

其中 $\omega = 2\pi\nu$ 是圆频率，ν 是每秒振动数。叠加原理成立：

$$A_1\cos(\omega t + \delta_1) + A_2\cos(\omega t + \delta_2) = A\cos(\omega t + \delta),$$

并且有下列关系

$$A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2 = A\cos\delta,$$

$$A_1\sin\delta_1 + A_2\sin\delta_2 = A\sin\delta,$$

由此可以确定 A 和 δ。用复数记法，公式较简单。我们有：

$$a = Ae^{i\delta}\ (\text{复振幅}),$$

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = \mathrm{Re}Ae^{i(\omega t + \delta)} = \mathrm{Re}\,ae^{i\omega t}, \qquad [5.1]$$

和叠加原理：对两个振动的叠加

$$a=a_1+a_2. \qquad [5.2]$$

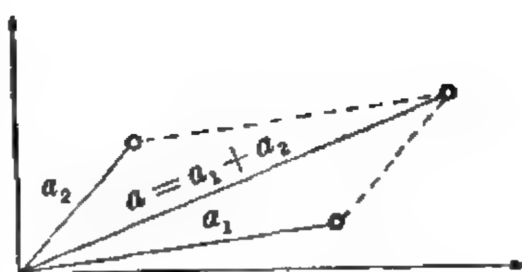


图 5.1

图 5.1 给出叠加的几何图示。只要我们仅仅是处理线性运算，那么写成复数形式，则一切都很简单地进行。无论如何，用二次表达式时，必须小心；例如一般说来，强度 I 是

$I\propto(\mathrm{Re}ae^{i\omega t})^2=(\mathrm{Re}u)^2=x^2$，其中 $u=ae^{i\omega t}$．于是，

$$I\propto\frac{1}{2}(u^*+u)^2=u^*u+\frac{1}{2}(u^2+u^{*2})=|a|^2+\mathrm{Re}a^2e^{2i\omega t},$$

$$I\propto|a|^2\{1+\cos(2\omega t+2\delta)\}.$$

括号内第一项是常数，而第二项是振荡的。除 ω 很大以及所考察的是 I 的时间平均值外，不能简单地略去强度中的振荡项。

矢量振动。这里，u 不是标量而是矢量：

$$\boldsymbol{x}=\mathrm{Re}\boldsymbol{a}e^{i\omega t}=\mathrm{Re}\boldsymbol{u},$$

和 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是复矢量，即 a_i 是复数。作这类振动的点的轨迹是在一个固定平面内，并且是一个椭圆（可能退化成圆或直线）。

［证明］ *a.* **轨迹在一个平面内。**

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\mathrm{Re}i\omega\boldsymbol{a}e^{i\omega t},$$

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}=\mathrm{Re}\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}e^{i\omega t}+\boldsymbol{a}^*e^{-i\omega t})\times i\omega\boldsymbol{a}e^{i\omega t}=\mathrm{Re}\frac{\omega}{2}i\boldsymbol{a}^*\times\boldsymbol{a},$$

由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$。然而，$i\boldsymbol{a}^*\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ 是实数，因为 $\boldsymbol{c}^*=\boldsymbol{c}$。这样，$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}=\omega\boldsymbol{c}/2$ 是常矢，所以在整个运动期间，点都在垂直于 $\boldsymbol{c}$ 的平面内。

轨迹是一个椭圆。选取运动平面作为 $X-Y$ 平面。那末，

$$X=\frac{1}{2}(a_1e^{i\omega t}+a_1^*e^{-i\omega t}),$$

$$Y=\frac{1}{2}(a_2e^{i\omega t}+a_2^*e^{-i\omega t}).$$

设

$$a=a_1+ia_2,\quad a^*=a_1^*-ia_2^*,$$
$$b=a_1-ia_2,\quad b^*=a_1^*+ia_2^*,$$

便得到

$$X+iY=\frac{1}{2}(ae^{i\omega t}+b^*e^{-i\omega t}),$$

$$X-iY=\frac{1}{2}(be^{i\omega t}+a^*e^{-i\omega t}).$$

我们现在把坐标系(X,Y)旋转到(ξ,η):

$$\xi+i\eta=(X+iY)e^{i\alpha}=\frac{1}{2}(a'e^{i\omega t}+b'^*e^{-i\omega t}),$$

$$\xi-i\eta=(X-iY)e^{-i\alpha}=\frac{1}{2}(b'e^{i\omega t}+a'^*e^{-i\omega t}),$$

其中

$$a'=ae^{i\alpha},\qquad a'^*=a^*e^{-i\alpha},$$
$$b'=be^{-i\alpha},\qquad b'^*=b^*e^{i\alpha},$$

并且这样确定转角α使得a'/b'变为实的和正的。(对应于这旋转的坐标叫做简正坐标。)

特殊情况$b=0$时得出$X+iY=(1/2)ae^{i\omega t}$,很清楚这是圆运动;这对$a=0$也是正确的[A-2]。除这种特殊情况外,得到

$$b'/a'=e^{-2i\alpha}b/a=\rho\ (\text{实的和正的}),$$

$$b/a=\rho e^{2i\alpha},$$

其中2α被确定到模2π之内,因而,α在模π之内。所以

$$\xi+i\eta=\frac{1}{2}(a'e^{i\omega t}+\rho a'^*e^{-i\omega t}),$$

$$\xi-i\eta=\frac{1}{2}(\rho a'e^{i\omega t}+a'^*e^{-i\omega t}),$$

并且设$a'=2Ce^{i\delta}$,则

$$\left.\begin{aligned}\xi&=C(1+\rho)\cos(\omega t+\delta)\\ \eta&=C(1-\rho)\sin(\omega t+\delta)\end{aligned}\right\},$$

这是椭圆方程式，因为消去时间因子，得出

$$\frac{\xi^2}{[C(1+\rho)]^2}+\frac{\eta^2}{[C(1-\rho)]^2}=1.$$

若 $\rho=1$，则得到一个沿直线的振动。 [证毕]

傅里叶定理许可把周期过程表示为谐和过程的叠加:

$$\left.\begin{aligned} &f(t+T)=f(t)\\ &f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n e^{in\omega t}\\ &a_n=\frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t \end{aligned}\right\}, \qquad [5.3]$$

其中 $\omega=2\pi/T$ 是圆频率。为使公式[5.3]成立，f 无需是连续的，但须是有界变化。

如果 f 是实的，那末

$$a_{-n}=a_n^*$$

此外，由于因子 $e^{-in\omega t}$ 的正交性，对于系数 a_n，我们有

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left|f(t)-\sum_{n=-N}^{+N}a_n e^{in\omega t}\right|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int|f(t)|^2\mathrm{d}t-2\sum_{-N}^{N}a_n a_n^*$$
$$+\sum_{-N}^{N}a_n a_n^*=\frac{1}{T}\int|f(t)|^2\mathrm{d}t-\sum_{-N}^{N}|a_n|^2.$$

由此得到贝塞耳不等式

$$\frac{1}{T}\int|f(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant\sum_{-N}^{+N}|a_n|^2, \qquad [5.4]$$

当 $N\to\infty$，它变为完备(性)关系

$$\frac{1}{T}\int|f(t)|^2\mathrm{d}t=\sum_{-\infty}^{+\infty}|a_n|^2. \qquad [5.5]$$

形式地作下列极限过渡:

$\omega\to0,\ n\to\infty,\ n\omega\to\nu$(固定的)，$T\to\infty$，

$\omega=\Delta\nu,\ \ \omega\Sigma\to\int\mathrm{d}\nu,\ \ a_n=\omega A(\nu),$

就能把傅里叶公式推广而包括非周期运动。那么，

$$\left.\begin{aligned} A(\nu) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\nu t}\mathrm{d}t \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(\nu)e^{i\nu t}\mathrm{d}\nu \end{aligned}\right\}。 \qquad [5.6]$$

完备关系变成帕赛伐(Parseval)公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|A(\nu)|^2\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t. \qquad [5.7]$$

自然，全部积分必须存在，并且在无限远处函数“足够快地”趋于零时，才允许作这种极限过渡。

b. 波

沿 x 方向传播的平面波可用

$$u = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

表示，其中

$$u(x, t) = u(x, t + \tau), \qquad [5.8]$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau},\ \nu = \frac{1}{\tau} \\ k &= 2\pi\mu = \frac{2\pi}{\lambda},\ \ \mu = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\}。 \qquad [5.9]$$

对于

$$x = vt + 常数 = \frac{\omega}{k}t + 常数,$$

余弦的位相，

$$\varphi \equiv kx - \omega t + \delta$$

仍然是常数。因此，

$$v = \frac{\omega}{k} \qquad [5.10]$$

是波的相速。

一般说来，ω 与 k 之间存在一定关系：

$$\omega = f(k), \qquad (色散定律)。 \qquad [5.11]$$

特殊情况：ω 与 k 无关，$\omega/k=c$。这适用于真空中的光。

在三维情况中，我们用矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{k}$：

$$u=A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\delta). \qquad [5.8']$$

这样，$\boldsymbol{k}$ 垂直于等位相面。波面法线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的关系是

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}\frac{2\pi}{\lambda}, \qquad 且\ \boldsymbol{n}^2=1. \qquad [5.9']$$

色散定律变为

$$\omega=f(k_1,k_2,k_3)=f(\boldsymbol{k}). \qquad [5.11']$$

如果媒质是各向同性的，则简化为

$$\omega=f(|\boldsymbol{k}|).$$

线性叠加原理是这里所考虑的波的一个普遍性质。它说：如果 u_1 和 u_2 是媒质中两种可能的波态，那么，$c_1u_1+c_2u_2$ 也是可能的态。为使 u_1 和 u_2 是两个可能的态，色散定律必须被满足。

线性叠加原理在波动理论中具有非常深远的意义，而且在光学中也很适用［A-3］。可是，对于机械波，仅在振幅足够小的情况下才适用。（参看，例如，黎曼关于空气中爆炸波的著作。）由叠加原理，傅里叶定理允许把媒质中的任意波态表示如下：

$$\left.\begin{aligned} u&=\iiint A(k_1,k_2,k_3)\cos[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\delta(\boldsymbol{k})]\mathrm{d}^3k \\ &=\mathrm{Re}\iiint a(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\mathrm{d}^3k \end{aligned}\right\}. \qquad [5.12]$$

其中 $a=Ae^{i\delta}$。换句话说，如果给出任何一种[5.11′]形式的色散定律，并且（对于光学）要求线性叠加原理适用，那么[5.12]式便给出问题的普遍解。

用[5.12]式，初值问题

$$u(x,0)=u_0(x),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=u_0(x),$$

是可解的；这是因为

$$u_0 = \mathrm{Re}\iiint a(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{k},$$

$$\dot{u}_0 = \mathrm{Re}\iiint (-i)\omega a(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

$$= \mathrm{Im}\iiint \omega(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{k},$$

由此利用傅里叶逆变换公式确定复量 a:

$$\frac{1}{2}[a(\boldsymbol{k}) + a^*(-\boldsymbol{k})] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint u_0(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{x},$$

$$(-i)\frac{1}{2}[\omega(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) - \omega(-\boldsymbol{k})a^*(-\boldsymbol{k})]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \dot{u}_0(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}.$$

群速。我们考虑一个波包，即形式如[5.12]式给出的许多波的叠加：

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{Re}\iiint a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \mathrm{Re}\, w.$$

这里，假定 $a(\boldsymbol{k})$ 仅在 $\boldsymbol{k}$ 附近某小区域(例如，$\boldsymbol{k}\pm\Delta\boldsymbol{k}$)内显著不为零。波包的中心用

$$\bar{x}_i(t) = \frac{\int x_i u^2 \mathrm{d}V}{\int u^2 \mathrm{d}V} \qquad [5.13]$$

代表。

我们将看到，能量正比于 u^2，所以，[5.13]式即是能量“中心”。我们有

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2}(w + w^*)$$

且有

$$w = \iiint a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \mathrm{d}^3\boldsymbol{k},$$

所以

$$e^{-i\omega t}a(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint we^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \qquad [5.14]$$

和

$$u^2=\frac{1}{4}(w^2+w^{*2})+\frac{1}{2}ww^*.$$

这样，u^2 包含两种类型的项，常数项和两倍频率的振荡项。略去振荡项(时间平均)，然后得到

$$\bar{x}_i(t)=\frac{\int x_i ww^*\mathrm{d}V}{\int ww^*\mathrm{d}V}. \qquad [5.14']$$

分子变为

$$\begin{aligned}\int x_i ww^*\mathrm{d}V&=\int\mathrm{d}^3xw^*\int a(\boldsymbol{k})\frac{e^{-i\omega t}}{i}\frac{\partial}{\partial k_i}(e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}})\mathrm{d}^3k\\&=\int\mathrm{d}^3xw^*\int\left(i\frac{\partial a}{\partial k_i}+t\frac{\partial\omega}{\partial k_i}a\right)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\mathrm{d}^3k\\&=(2\pi)^3\left(\int a^*i\frac{\partial a}{\partial k_i}\mathrm{d}^3k+t\int\frac{\partial\omega}{\partial k_i}a^*a\mathrm{d}^3k\right),\end{aligned}$$

其中我们已分部积分并用了[5.14]式。用帕赛伐公式([5.7]式)，分母变为

$$\int ww^*\mathrm{d}^3x=(2\pi)^3\int aa^*\mathrm{d}^3k,$$

于是

$$\bar{x}_i(t)=\frac{\int a^*i\left(\frac{\partial a}{\partial k_i}\right)\mathrm{d}^3k}{\int a^*a\mathrm{d}^3k}+\frac{\int\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_i}\right)a^*a\mathrm{d}^3k}{\int a^*a\mathrm{d}^3k}t.$$

这样，

$$\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial t}=\overline{\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_i}\right)} \qquad [5.15]$$

是波包中心的传播速度。

群速定义为

$$U=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}. \qquad [5.16]$$

在光学中，$\boldsymbol{U}$ 的方向是几何光学中光线的方向。在推导群速中，我们是任意取 u^2 作为能量的量度。如果人们采用任意二次型 $\varphi(\omega)u^2$（例如 $(\partial u/\partial t)^2$，因为 $\partial/\partial t\propto\omega$），会得到完全相同的结果。

各向同性的情况。我们考虑一个波包，[5.12]式。对于各向同性情况，必定有

$$\omega=\omega(k), \qquad k=|\boldsymbol{k}| .$$

如果波包足够小，那么

$$\bar{v}\simeq v=\frac{\omega}{k}, \qquad U=v+k\frac{\partial v}{\partial k}=v-\lambda\frac{\partial v}{\partial\lambda}.$$

在各向同性的情况中，因为关系式

$$\nabla^2=-k^2$$

适用于[5.12]式中的被积函数，那么，对于波包的任意个别谐波①总能令

$$\nabla^2 u+k^2 u=0. \qquad [5.17]$$

一方面，[5.17]式是特殊的，它局限于对时间为正弦式的过程；然而，另一方面，由于未曾假定特殊的色散定律，因此它又是普遍的。它也是叠加原理的一种表达式，但仅限于相同频率的波态。

特殊情形。设媒质没有色散：对于波包中所有的波，$v=U=c$。于是

$$c=\frac{\omega}{k}=\text{常数} \qquad [5.17']$$

对于波包中所有的波都适用。

对于波包中每一种波，由公式[5.12]得到

① 从德文版译出，英文版无"谐"字。——中译本编注

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=-\omega^2=-c^2k^2. \qquad [5.18]$$

这样，代入[5.17]式，得到波动方程

$$\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \qquad [5.18']$$

由波运动学叠加原理的普遍表达式[5.12]，以十分特殊的色散定律[5.17′]作基础，我们已推导出一个微分方程。在这种特殊情形下（并仅在这种情形下）[5.12]和[5.18]式是等效的。叠加原理[5.12]的线性反映在微分方程[5.18′]的线性中。

一维情形。作为[5.18′]式适用的特殊情形，我们考虑单个位置坐标 x，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \qquad [5.18'']$$

按照[5.12]式，其解是

$$\begin{aligned}2u&=\int_{-\infty}^{+\infty}a(k)e^{i(kx-c|k|t)}\mathrm{d}k+\text{复数共轭}\\&=\int_0^{\infty}a(k)e^{ik(x-ct)}\mathrm{d}k+\int_0^{\infty}a(-k)e^{-ik(x+ct)}\mathrm{d}k\\&\qquad+\text{复数共轭}。\end{aligned}$$

由于 $a(-k)$ 与 $a(k)$ 完全无关，因此

$$2u=f(x-ct)+g(x+ct) \qquad [5.19]$$

即为最普遍解。对于这种情形，不用傅里叶积分而直接求解波动方程[5.18′]，也能导出[5.19]式。

同样，得到各向同性无色散媒质中的球面波

$$ru=f(r-ct)+g(r+ct). \qquad [5.19']$$

要证明这点，只需把 $v=ru$ 代入波动方程[5.18′]，从而得到有关 v 的[5.18″]式（将 x 换成 r）。若要 $r=0$ 处没有奇点，那么必须要求

$$ru=f(r-ct)-f(-r-ct).$$

§6. 折射，反射，干涉

现在我们把§5里讨论的普遍波动理论应用到光学中。为了使这成为可能，必须证明在第一章中讨论的光线理论包含在波动理论中，或者至少是后者的某种极限情形。现在将对折射和反射基本定律证明是这样。

设分别用 $\boldsymbol{k}, \omega$ 和 $\boldsymbol{k}', \omega'$ 表征的区域的界面 F 已给定。我们考虑在各向同性媒质中的一个平面波。

我们要求位相在界面上是连续的。这要求

$$\omega=\omega'. \qquad [6.1]$$

此外，对于在 F 上的 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'$。这样，对于在 F 上的 $\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}=0$。所以，$(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$ 必须平行于(界)面法线 $\boldsymbol{N}$。然而，这就是折射定律：

$$(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{N}-\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{N}=0,$$

即

$$k\sin\theta=k'\sin\theta'. \qquad [6.1']$$

与[1.1]式比较，看出

$$n/n'=k/k'=\lambda'/\lambda. \qquad [6.2]$$

我们已注意到，就各向同性的情形来说，相速是 $v=\omega/k$. 代入[6.2]式，再用[6.1]式，得到

$$\frac{n}{n'}=\frac{v'}{v}. \qquad [6.3]$$

真空中不存在色散是一个实验事实；因此，在我们的理论中必须假定真空中的光有一个普适速度 c。此外，按定义，真空中 $n=1$，所以，对于折射率为 n（相对于真空）的任意媒质，得到

$$v=\frac{c}{n}. \qquad [6.3']$$

这是用直接实验能验证的折射率与相速的关系。c 的数值必须由

实验确定，它并非从理论预言。

对反射光线也要求波场在界面F是连续的。正如前面那样，得到$\omega=\omega'$和对于在F上的$\boldsymbol{x}$，$(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}=0$。然而，从上面我们有$n=n'$(相同的媒质)，所以，$|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}'|$。这样，$(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$垂直于$F$，或者$(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}')$垂直于$F$，其中$|\boldsymbol{t}|=1$。这是反射定律。

为了更普遍地证明光线理论包含在波动理论中，或者至少代表前者的一种极限情形，现在，假定一种非均匀各向同性媒质。考虑对时间为谐和的过程，那么对于这样一种媒质，[5.17]式成立：

$$\nabla^2 u+k^2 u=0, \qquad [5.17]$$

其中k是位置的函数。按照[6.2]式引进折射率，我们得到

$$\nabla^2 u+k_0^2 n^2 u=0, \qquad [6.4]$$

其中k_0是k在真空中的值。对于u，我们假定

$$u=\mathrm{Re}\,e^{i(k_0 S-\omega t)}, \qquad [6.5]$$

其中$S=S(\boldsymbol{x})$是复数。此外，$u_1=e^{ik_0 S}$必须是[6.4]式的解。我们有

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=ik_0\frac{\partial S}{\partial x}u_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\left\{\left(ik_0\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+ik_0\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right\}u_1.$$

代入[6.4]式并简化，得到S的方程

$$-(\nabla S)^2+i\frac{1}{k_0}\nabla^2 S+n^2=0. \qquad [6.6]$$

几何光学中，有类似的方程，即

$$-(\nabla S_0)^2+n^2=0$$

(参看[2.2]式)。此外，几何光学中也有关系式

$$\nabla S_0=\boldsymbol{p}=n\boldsymbol{t},\quad \nabla^2 S_0=\mathrm{div}\,\boldsymbol{p}.$$

为了使[6.6]式过渡到几何光学方程，我们必须要求

$$\frac{1}{k_0}(\operatorname{div}\boldsymbol{p})\ll p^2. \qquad [6.7]$$

一维情形中，这是

$$\frac{1}{k_0}\left|\frac{dp}{dx}\right|\ll p^2, \qquad \left|\frac{dn}{dx}\right|\ll k_0 n^2,$$

$$\left|\frac{\lambda}{2\pi}\frac{dn}{dx}\right|\ll n. \qquad [6.8]$$

这样，n 在一个波长的距离内的变化必须是很小的。——在那种情况下，波动理论和光线理论给出同样的结果。如果波长很小，条件[6.8]一定能满足。这样，我们可以把 S 按 λ 或 $1/k$ 的幂展开，直接得到

$$S=S_0+\frac{1}{k_0}S_1+\cdots+\frac{1}{k_0^n}S_n+\cdots,$$

其中 S_0 是几何光学方程的解(展开式的第一级近似，如果把全部 $1/k$ 和较高幂项都略去的话)。

由此，可以看出，如果假定 $\lambda\to0$，那么，对于各向同性媒质情形，波动理论描述现象的方式与几何光学相同。现在产生了这样问题，是否在 λ 的有限性具有实验意义的情况下，波动理论比光线理论是对自然界的较好近似。

干涉现象表明，用光的波动图象是正确的途径。我们设在 § 4 中引进的光强度(例如，光照度)正比于波函数的平方。那么，与几何光学不同，在我们新的理论中，强度失去相加性；的确，这是被观察到的情况。例如，令两个(谐和的)波在给定点叠加。如果

$$u_1=\mathrm{Re}\,a_1e^{-i\omega t},$$

$$u_2=\mathrm{Re}\,a_2e^{-i\omega t}$$

是两个波的各别激励，那么

$$u_1+u_2=\mathrm{Re}(a_1+a_2)e^{-i\omega t}$$

是考察点的总激励。这样，得到

$$I_1 \propto |a_1|^2, \qquad I_2 \propto |a_2|^2,$$
$$I \propto |a_1+a_2|^2 = (a_1+a_2)(a_1^*+a_2^*),$$

所以

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta, \qquad [6.9]$$

其中 δ 表示 a_1 和 a_2 的幅角差。如果这位相差是很确定的，那么我们说的是相干波列。在这种情况下，强度不可加性是显然的。然而，如果我们对全部可能的 δ 求时间平均，即从分离的光源发的光，那么再次得到 $I = I_1 + I_2$。

相干光能用菲涅耳镜实验产生。在图 6.1 中，L 是光源，分别由镜子 S_1 和 S_2 反射而产生虚光源 L_1' 和 L_2'。我们计算 P 点的强度：

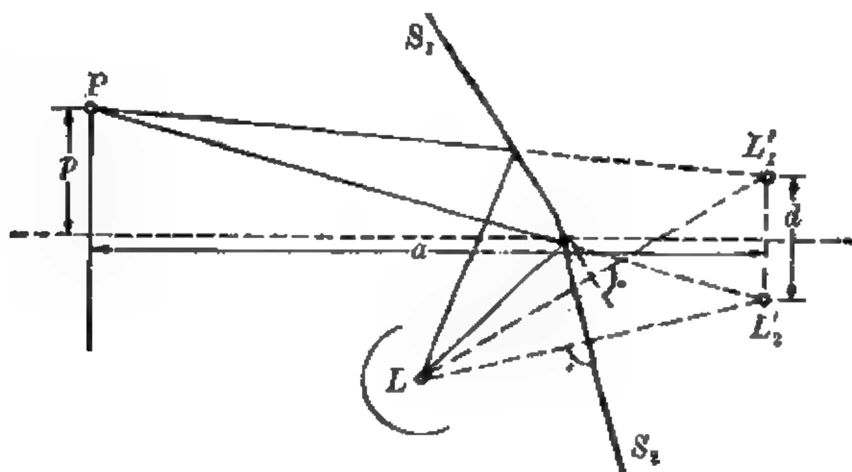


图 6.1

$$r_1 = PL_1' = PS_1L, \qquad r_1^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}d - p\right)^2,$$

$$r_2 = PL_2' = PS_2L, \qquad r_2^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}d + p\right)^2,$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2dp,$$

$$r_1 + r_2 \simeq 2a, \quad \text{所以} \quad r_1 - r_2 \simeq \frac{dp}{a}.$$

这样，得到

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dp}{a},$$

与[6.9]式一起，得

$$I=2I_0(1+\cos\delta)=4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}.$$

由此，我们推知，在 $\delta=2\pi n$（n 是整数）时，就是说，在 $p=an\lambda/d$ 处，得到强度极大。其间，在 $p=(\lambda a/2d)(2n+1)$ 处，强度为零。

产生干涉现象的另一个实验是将经平行面反射后的等倾光线汇合（图 6.2）。由计算得出下列结果：

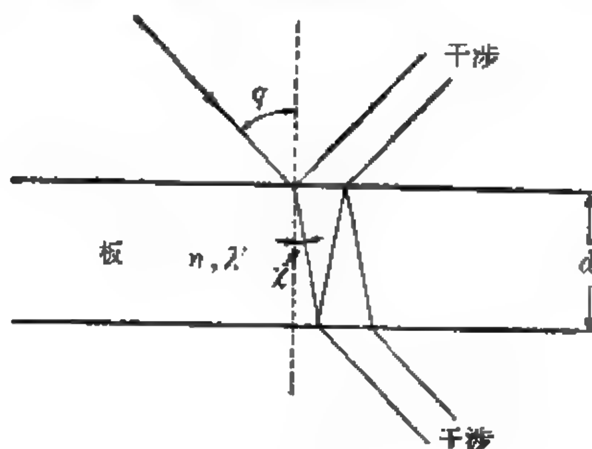


图 6.2

条件，

$$2d\cos\chi=m\lambda'$$

意味着下方（透射）为极大，上方（反射）为极小，而对于

$$2d\cos\chi=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda',$$

则得到下方为极小和上方为极大。

牛顿环是另一干涉现象。这实验显示光的颜色自红变紫时，波长变小。

§7. 衍射理论

a. 基尔霍夫的普遍解

按照几何光学，小孔应该总是投射出轮廓明显的影子。然而，

实际上却观察到叫做衍射的熟悉现象。因此，我们尝试在这里阐明的波动概念的基础上解释这些现象。

为了不必用普遍公式[5.12]计算，我们假定整个波场是对时间为谐和的，具有时间因子 $e^{-i\omega t}$。当然(由于连续性)很清楚，如果我们假定波场某一点处是 $e^{-i\omega t}$ 形式的时间上无界的激发，那么我们在其他所有点也都必须这样做，而且用相同的 ω。这样能在数学上得到正确的表达；然而，在自然界中，这种理想化只能近似地被满足，因为实际上人们总是必须处理（具有有限持续时间的）波包。

在这种假设和各向同性媒质的要求下，[5.17]式成立：

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0.$$

在衍射现象中，屏幕具有 u 和 $\partial u/\partial n$ 的边界条件的意义。方程[5.17]应对这些边界条件求解。开始就应提出，这个数学问题只有在很特殊的情况下才是严格地可解的。其余的，我们必须限于近似解。这里我们将处理基尔霍夫近似。

我们有对闭合曲面适用的格临定理：

$$\int_{V_Q} (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\mathrm{d}V = \oint_{F_Q} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}f.$$

把[5.17]式的解作为 u 代入这公式中，并设

$$v = \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}.$$

(光源 L 在曲面 F 外。) P 点是任意场点，并且 Q 是遍及积分域变化的点。这样

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0,$$

所以对于 $Q \neq P$,

$$u\nabla^2 v - v\nabla^2 u = 0.$$

如果 P 是在积分域内部，那么必须用一小球把它剔除：

$$\oint_F \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}f=0 \quad \text{如果} P \text{在} V \text{外,}$$

$$\oint_{F+球} \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}f=0 \quad \text{如果} P \text{在} V \text{内。}$$

计算小球的贡献时，我们注意在球面上$\partial/\partial n=-\partial/\partial r$。当$r\to 0$，只有

$$-\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial r}=\left[\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right]e^{ikr}$$

这项是重要的。在球面上，$\mathrm{d}f=r^2\mathrm{d}\Omega$，得到

$$\oint_{球}\mathrm{d}f\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)=-\oint \mathrm{d}\Omega u_P=-4\pi u_P.$$

这样

$$\oint_F \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}f$$

$$=\begin{cases}4\pi u_P & \text{如果} P \text{在曲面内,}\\ 0 & \text{如果} P \text{在曲面外.}\end{cases} \qquad [7.1]$$

现在，我们令闭合曲面的一部分趋向无限远。此外，在无限远处，要求[5.17]式的解渐近地如

$$u\sim\frac{e^{ikr}}{r},$$

并且e^{-ikr}形式的部分没有贡献。这是无限远处的边界条件：辐射条件。这样，物理上，仅容许外传波。然而，用这条件，被积表达式①应有

$$\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)r^2\mathrm{d}\Omega\to 0, \quad 当\ r\to\infty.$$

这样，我们只需积分曲面的有限部分。于是得

$$\int_F \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}f$$

---

① 德文原本和英译本都是被积函数。——中译者注

$$=\begin{cases}4\pi u_P & \text{如果}P\text{和}L\text{在}F\text{的异侧,}\\ 0 & \text{如果}P\text{和}L\text{在}F\text{的同侧。}\end{cases} \qquad [7.2]$$

这里, L 表示光源。如果人们早已有此问题的解,则公式[7.2]是精确的。然而,实际上,在这样的曲面上的 u 和 $\partial u/\partial n$,人们通常都不知道;并且这些量事先不可能给出。

基尔霍夫解法。把曲面分为屏和孔: $F=S+A$。然后,基尔霍夫假设

在 A 内: $u=u^0, \dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial u^0}{\partial n}$ (未受扰的传播);

在 S 上: $u=0, \dfrac{\partial u}{\partial n}=0$ (光激励消失)。

u^0 被理解为未受扰的光传播所应有的 u:

$$u^0(Q)\equiv u_Q^0=\text{常数}\frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}},$$

其中 L 表示光源。

如果把基尔霍夫假说代入[7.2]式,那么得到

$$u_P=\frac{1}{4\pi}\int_A\left(v\frac{\partial u^0}{\partial n}-u^0\frac{\partial v}{\partial n}\right)df$$

$$=u^0(P)-\frac{1}{4\pi}\int_S\left(v\frac{\partial u_Q^0}{\partial n}-u_Q^0\frac{\partial v}{\partial n}\right)df. \qquad [7.3]$$

这是波动方程的基尔霍夫解。已经提到过,这解不是精确的,因为假说无疑地是不正确的。如果由[7.3]式计算 u_Q^0 和 $\partial u_Q^0/\partial n$,那么结果完全不是代进去的那样。并且,正确的边界条件完全不是所假设的那些,因为屏上只能指定 u 或 $\partial u/\partial n$ 中的一个(不能两者),而在孔处两者都不能给出。在这假说下,基尔霍夫相信他已找到了完全"黑"的屏的解了,可是这样的屏甚至是不能定义的。

当孔比波长大,而且衍射角不太大时,基尔霍夫的解是有用的。

如果把孔和屏互换，那么由基尔霍夫解得出巴俾涅定理：

$$u_1(P)+u_2(P)=u^0(P). \qquad [7.4]$$

（这里，u_1 是在 S 处屏的解，u_2 是在 S 处孔的解。）例如，假设光源 L 由透镜理想地成象于物镜屏上（在这样的屏上，除清晰象点 L' 外，到处 $u_0=0$），不管是插入给定的孔阑，还是插入另一个在前者开孔处为屏而有屏处却为开孔的光阑，光分布（$\propto u^2$）都是相同的。

基尔霍夫解的改进。可以稍为不同地选取函数 v。我们假定衍射面 E 是平面，并且引进 P' 点，它是在 E 中 P 点的象。然后，设

$$v=\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}-\frac{e^{ikr_{P'Q}}}{r_{P'Q}}$$

（其中 Q 是积分所遍及的变动点）。在 E 上，新的 v 有如下性质：

$$\left.\begin{aligned} &v=0 \\ &\frac{\partial v}{\partial n}=2\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \end{aligned}\right\}.$$

新的解 $\bar{u}_P$ 是

$$4\pi\bar{u}_P=4\pi u_P^0-\int_S(-u^0)2\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r}\mathrm{d}f \qquad [7.5]$$

与旧解的关系是

$$\bar{u}=u(P)-u(P')+u^0(P').$$

另一种可能性是设

$$v=\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}+\frac{e^{ikr_{P'Q}}}{r_{P'Q}},$$

由此，在 E 上得到

$$\left.\begin{aligned} &v=2\frac{e^{ikr}}{r} \\ &\frac{\partial v}{\partial n}=0 \end{aligned}\right\},$$

$$4\pi\bar{\bar{u}}_P=4\pi u_P^0-2\int\frac{\partial u^0}{\partial n}\frac{e^{ikr}}{r}\mathrm{d}f. \qquad [7.5']$$

并且，相应地，

$$\bar{\bar{u}}_P = u(P) + u(P') - u^0(P').$$

然而，这种方法并未得到任何基本的东西。这些解的优点是，只需指定一个边界条件，而不是象以前要指定两个。

基尔霍夫解的推论。我们现在代入下列函数 u_Q^0 和 v_Q：

$$v_Q = e^{ikr_0}/r_0,$$

$$u_Q^0 = Ae^{ikr_1}/r_1,$$

$$u^0(P) = Ae^{ikr}/r.$$

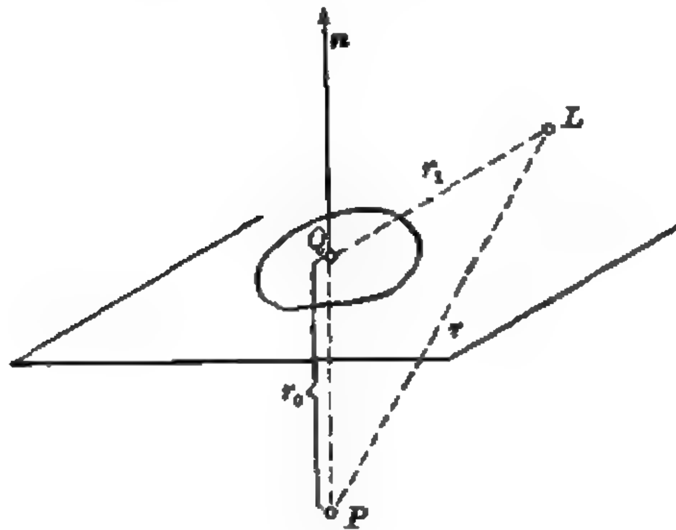


图 7.1

然而，

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\, ik\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right).$$

这样，由[7.3]式得到

$$u_P = \frac{A}{4\pi}\int_A \frac{e^{ik(r_0+r_1)}}{r_0 r_1} ik$$

$$\times\left[\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_1)\left(1-\frac{1}{ikr_1}\right) - \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)\left(1-\frac{1}{ikr_0}\right)\right]\mathrm{d}f \qquad [7.6]$$

作为点光源引起的效应的公式。

现在作下列简化：

$$kr_0 \gg 1,\ kr_1 \gg 1 \qquad (\lambda \text{比} r \text{小得多})。$$

此外，我们仅考察小衍射角，所以这样做是考虑到这样的实验事实，即在离开几何影边界很短距离的地方，光的分布是几何光学所给出的那样。现在，由于λ很小，因子$e^{ik(r_0+r_1)}$是一个振荡非常迅速的函数，而其余的因子，$\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1)-\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_0)$却变化缓慢(已取$1/ikr \sim 0$)。这样，我们可以假定后者是常数并用$-2\cos\delta$代替，其中$\delta$是一个适当地选择的平均角度。那么，由[7.6]式得到

$$u_P = -A\frac{ik}{2\pi}\cos\delta\int_A \frac{e^{ik(r_0+r_1)}}{r_0 r_1}\mathrm{d}f$$

$$= u^0 + A\frac{ik}{2\pi}\cos\delta\int_S \frac{e^{ik(r+r_1)}}{r r_1}\mathrm{d}f. \qquad [7.7]$$

如果我们假定光(阑)孔开在平面上，那么，可以把[7.7]式在零光线邻近展开。令M是孔中的一点，$(\xi, \eta, 0)$是积分点Q的笛卡儿坐标。(我们已取M作为坐标系的原点，以光(阑)孔的平面取作x-y平面。)于是得到

$$r_i^2 = (x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2 + z_i^2, \qquad i = 0, 1,$$

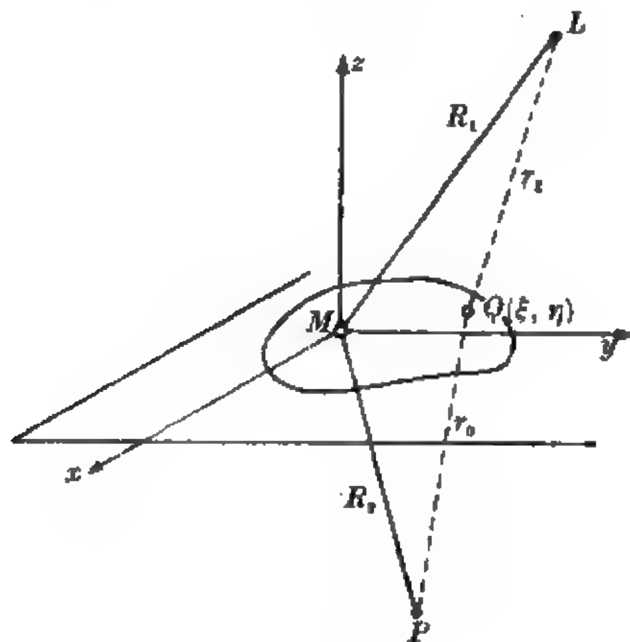


图 7.2

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

即
$$r_i^2 = R_i^2 - 2(x_i\xi + y_i\eta) + \xi^2 + \eta^2.$$

然而，我们知道

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^4}{8} + \cdots,$$

所以，

$$r_i = R_i - \frac{x_i\xi + y_i\eta}{R_i} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_i} - \frac{(x_i\xi + y_i\eta)^2}{2R_i^3} + \cdots.$$

把它代入[7.7]式，得出

$$u_p = -A\frac{ik}{2\pi}\cos\delta\frac{e^{ik(R_0+R_1)}}{R_0R_1}\iint e^{ik\Phi(\xi,\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \qquad [7.8]$$

其中

$$\Phi(\xi,\eta) = -\frac{x_0\xi + y_0\eta}{R_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2R_0^3} + \cdots$$
$$-\frac{x_1\xi + y_1\eta}{R_1} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_1} - \frac{(x_1\xi + y_1\eta)^2}{2R_1^3} + \cdots.$$

用[7.8]公式，通过直接计算(在假设基尔霍夫解是正确的范围内)能确定衍射现象的光分布。[7.8]式中Φ函数展开式的项数考虑得愈多，进行计算就愈困难。如果仅考虑Φ的线性项，那么，物理上意味着光源和场点都是无限地远离衍射孔的。$x_i/R_i = \alpha_i$ 和 $y_i/R_i = \beta_i (i=0,1)$变为方向余弦，并且[7.8]式变为

$$u_p = 常数\cdot\int e^{-ik[\xi(\alpha_0+\alpha_1)+\eta(\beta_0+\beta_1)]}\cdot\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \qquad [7.8']$$

实际上，人们当然不会假定L和P是非常远的；而是假定用透镜得到了平行光线。这种情况叫做**夫琅和费衍射**。

如果还考虑二次项，那么我们得到**菲涅耳衍射**。我们将处理两种衍射类型的一些情形。

b. 夫琅和费衍射

1. **狭缝衍射**。对于夫琅和费情形[7.8]式成立。如果狭缝(宽

度 a)是无限长的,那么是平面问题。[参看图 7.3]

$$\beta_0+\beta_1=0,$$

$$\alpha_0=\sin\psi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right),$$

$$\alpha_1=-\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right),$$

$$\mu=k(\alpha_0+\alpha_1)=k(\sin\psi-\sin\varphi).$$

用这些关系,对于狭缝[7.8]式给出

$$u_P=\text{常数}\cdot\int_{-a/2}^{+a/2}e^{-i\mu\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{\text{常数}}{\mu}\{e^{-i\mu a/2}-e^{i\mu a/2}\}.$$

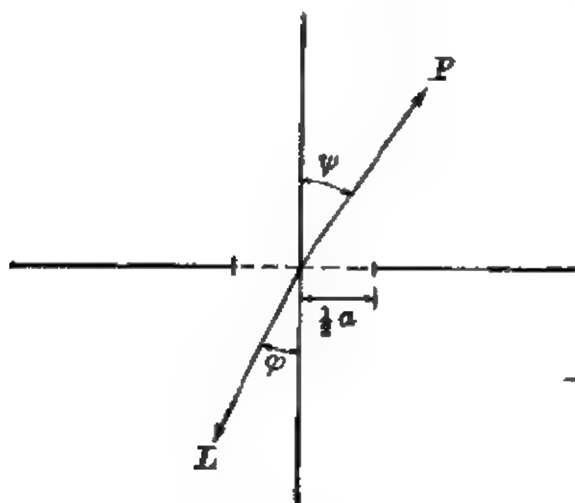


图 7.3

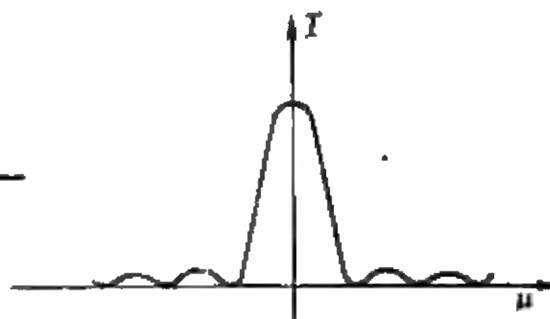


图 7.4

于是,强度是

$$|u|^2=\text{常数}\left(\frac{\sin\mu a/2}{\mu}\right)^2.$$

如果直射光线的强度叫做 I_0,那么,[参看图 7.4]

$$|u|^2=I_0\left(\frac{\sin\mu a/2}{\mu a/2}\right)^2. \qquad [7.9]$$

因此,

$$\frac{a}{2}\mu=\pm\pi,\ \pm2\pi,\ \cdots,$$

或

$$a(\sin\psi-\sin\varphi)=n\lambda$$

时，有极小值。

2. **圆孔衍射。**圆置于 ξ-η 平面内。那么，[7.8′]式变为

$$u=\text{常数}\int_{\text{圆}} e^{-ik\{\xi(\alpha_0+\alpha_1)+\eta(\beta_0+\beta_1)\}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

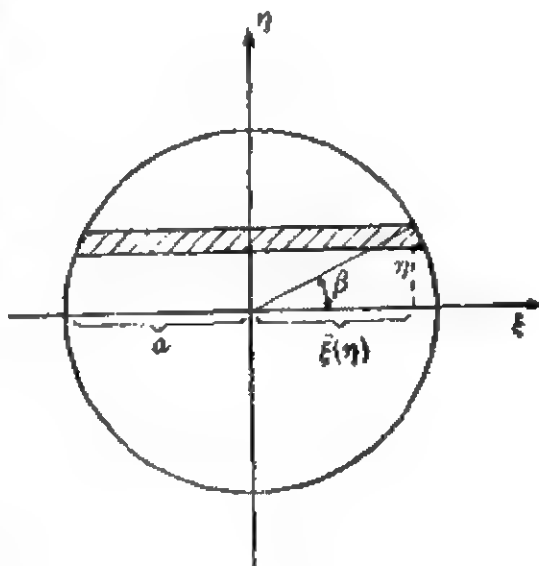


图 7.5

我们现在假定光垂直入射到光阑上，所以 $\alpha_1=\beta_1=0$ 并且 z 轴变成全部现象的对称轴。此外，引进衍射角 θ，并且在对称的基础上，我们看出 u 是与方位角无关的，我们设 $\beta_0=0$ 所以 $\alpha_0=\sin\theta$。于是

$$u=\text{常数}\int_{\text{圆}} e^{-ik\xi\sin\theta}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

这里，我们必须遍及 $-\bar{\xi}<\xi<\bar{\xi}$ 范围积分 ξ，遍及 $-a<\eta<a$ 范围积分 η。进行第一个积分，得

$$u=\text{常数}\int\frac{1}{\sin\theta}\sin(k\bar{\xi}\sin\theta)\,\mathrm{d}\eta.$$

然而，现在能用圆的半径和极角来表示 $\bar{\xi}$：

$$\bar{\xi}=a\cos\beta,$$

$$\eta=a\sin\beta.$$

代换后，得

$$u=\frac{\text{常数}}{\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin(ka\sin\theta\cos\beta)\cos\beta\,\mathrm{d}\beta.$$

然而，我们知道一阶贝塞耳函数由下式定义：

$$J_1(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\sin(z\cos\beta)\cos\beta d\beta.$$

这样，得到

$$u=\text{常数}\,\frac{J_1(ka\sin\theta)}{\sin\theta},$$

强度

$$I\propto|u|^2=\text{常数}\,\frac{J_1^2(ka\sin\theta)}{\sin^2\theta}.$$

对于很小的 z, $J_1(z)/z\sim 1$。用 I_0 表示未衍射光的强度，便有

$$I=I_0\left(\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right)^2. \qquad [7.10]$$

$J_1(z)$的第一个为零的点在 $z=1.22\pi$ 处，因此，第一个暗环发生在衍射角 θ_1 处，其中

$$\sin\theta_1=\frac{1.22\pi}{ka}=0.61\,\frac{\lambda}{a}. \qquad [7.10']$$

$J_1(z)$的第N个为零的点渐近地在 $z_N\sim\pi\left(N+\frac{1}{4}\right)$，所以，对于第 N 个极小，得到

$$\sin\theta_N\sim\left(N+\frac{1}{4}\right)\frac{\lambda}{2a}.$$

3．光栅衍射。我们把一个 m 条（无限狭长的）等距（d，叫做光栅常数）① 而毗连的狭缝组叫做光栅。这样，[7.8′]式中的积分过渡到以下的和：

$$u=\text{常数}\sum_{p=0}^{m-1}e^{-ipdk(\alpha_0+\alpha_1)},$$

或者，如果我们再设

$$\mu=k(\alpha_0+\alpha_1)=k(\sin\psi-\sin\varphi)$$

（参看图 7.3），

① 括号内的解释是中译者加的。——中译者注

$$u=\text{常数}\sum_{p=0}^{m-1}e^{-ip\mu d}=\text{常数}\frac{e^{-im\mu d}-1}{e^{-i\mu d}-1}.$$

这样，

$$I\propto|u|^2=\text{常数}\frac{1-\cos m\mu d}{1-\cos\mu d}$$

$$=\text{常数}\left(\frac{\sin m\mu d/2}{\sin\mu d/2}\right)^2. \qquad [7.11]$$

当分子和分母都为零时，发生N级主极大：

$$\frac{\mu d}{2}=N\pi,\qquad(\alpha_1+\alpha_2)\frac{d}{\lambda}=N. \qquad [7.11']$$

在主极大处，$I\sim m^2$。在

$$\frac{m\mu d}{2}=N\pi\ \text{和}\ \sin\frac{\mu d}{2}\neq 0$$

处强度为零。由此，我们得出结论，衍射图样



图 7.6

如图7.6所示。如果考虑到光栅中狭缝的宽度，那么我们得到狭缝的和光栅的公式的乘积。光栅是光谱分析最重要的仪器。用它可以测量波长。

技术上，如果一个波长的主极大恰好落在另一个波长的第一极小上，那么认为两个相邻的波长“被分辨了”。

按照[7.11′]式，$(\sin\varphi-\sin\psi)(d/\lambda)=N$，使得垂直入射时，第$N$级主极大发生于衍射角

$$\sin\psi=\frac{\lambda N}{d},$$

因此，其后的第一个零点和它有角间距

$$\Delta(\sin\psi)=\frac{\lambda}{dm}.$$

另一方面，如果改变波长，那么主极大的中心移动

$$\Delta'(\sin\psi)=\frac{\Delta\lambda}{d}N.$$

如果我们要 $\Delta'(\sin\psi)=\Delta(\sin\psi)$①，那么，分辨率 A 为②

$$A\equiv\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=Nm.$$

因此，分辨率 $A\equiv\lambda/\Delta\lambda$ 等于级数与光栅中刻线数的乘积。

4. **显微镜的分辨率**。夫琅和费理论指出怎样才能定义分辨率的概念。我们考虑显微镜的例子。

发光物。如果 P 点如此靠近于 Q 点以致 P' 落在 Q 的衍射图样的第一主极大之内，那么便不再能区别 P 点和 Q 点了。

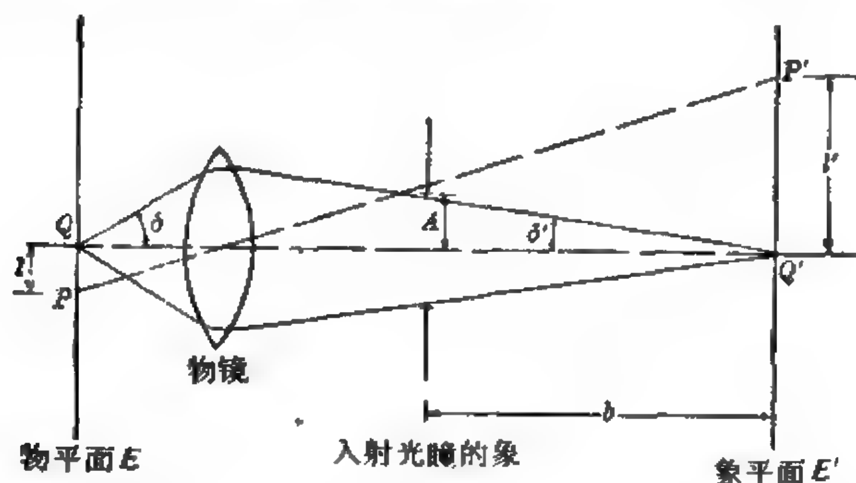


图 7.7

如果物平面 E 精确地成象在象平面 E' 处，那么必须满足正弦条件

$$ln\sin\delta=l'n'\sin\delta'\simeq l'n'\delta'$$

① 德，英文本都简作 $\Delta'=\Delta$。——中译者注

② 这句是中译者加的。——中译者注

为了能区别P和Q，用入射光瞳的象作为衍射孔，人们必定有(A为入射光瞳的象的大小。)①

$$\frac{l'}{b} > \varphi' = 0.61\frac{\lambda'}{A}, \quad 但 \quad \frac{A}{b} = \delta',$$

所以

$$l' \geqslant 0.61\frac{\lambda_0}{n'\delta'}.$$

用上面讲的正弦条件，得到

$$l \simeq \frac{l'n'\delta'}{n\sin\delta} > 0.61\frac{\lambda_0}{n\sin\delta}.$$

受照物。假定光栅常数为d的光栅作为“标准物”。对于想要得到的象，必定包含由光栅产生的衍射图样的许多级，否则无(相似于物的)象可得。② 令φ是第一主极大角，这样在焦平面内C和C_1处形成两个相干光源，并且这些光源在象平面E'处(参看菲涅

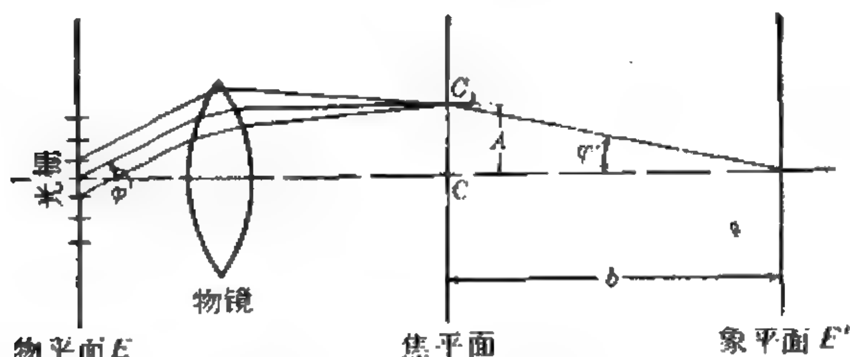


图 7.8

耳实验，图 6.1)产生间距③$d' = \lambda b/A$的线系。所以，至少包含光栅的一个衍射极大时，我们才得到一个其结构与物相似的像。

$$\varphi < \frac{1}{2}(孔角) = \delta,$$

① 为了避免与上分节分辨率混淆，中译者加上此处括号中的注释。——中译者注

② 这后半句是从德文原本译出，英译本没有这半句。——中译者注

③ “间距”二字是中译者加的。——中译者注

$$\sin\varphi = \frac{\lambda_0}{nd} < \sin\delta,$$

$$d > \frac{\lambda_0}{n\sin\delta},$$

其中 $n\sin\delta$ 叫做数值孔径。当系统使直射光线投射到透镜的边缘时，就得到了 1/2 的因子。如果我们满足于仅指示质点的存在而不想要知道它的形状的话，那么确定质点应多么小就只是光强的问题了。

分辨率的概念也能应用到其他光学仪器中。这样，对阶梯光栅(迈克尔孙透射阶梯光栅)的计算给出[A-4]

$$A = md\left(\frac{n-1}{\lambda} - \frac{dn}{d\lambda}\right),$$

其中 m 是层数。(其他的例子，参看补充书目。)

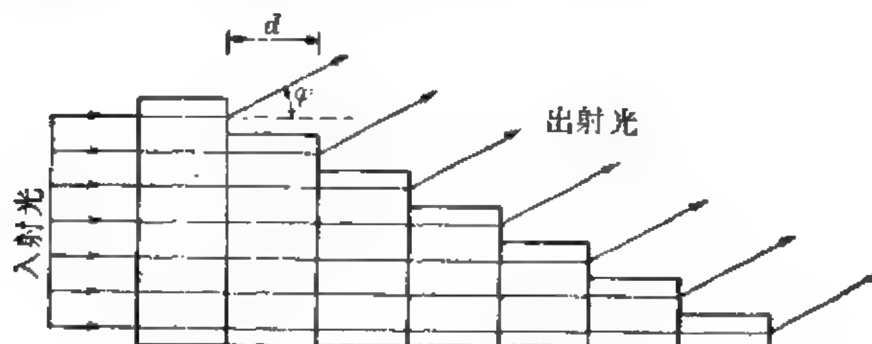


图 7.9

c. 菲涅耳衍射

我们现在假定，从衍射孔到光源 L 和场点 P 都是有限距离。于是，在[7.8]式中至少要考虑到二次项。同时，我们把坐标系的原点安放在连线 PL 与衍射孔平面的交点处。(在 L 固定时，对每个 P 点都有不同的坐标系。)这样，我们获得在[7.8]式的 Φ 中去掉线性项的结果。如果再令 $y_1 = y_0 = 0$，那么 $\alpha = \alpha_0 = \sin\delta$，而结果是

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R_1}\right)(\xi^2\cos^2\delta+\eta^2)\\u(P)&=-\frac{ik\cos\delta}{2\pi R_0R_1}e^{ik(R_0+R_1)}\int e^{ik\Phi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}\right\}. \qquad [7.12]$$

我们作下列变数变换:

$$\left.\begin{aligned}k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_0}\right)\xi^2\cos^2\delta&=\pi u^2\\k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_0}\right)\eta^2&=\pi v^2\end{aligned}\right\}, \qquad [7.13]$$

所以,

$$k\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R_1}\right)\cos\delta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\pi\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

由此[7.2]式变为

$$u(P)=-\frac{i}{2}\frac{e^{ik(R_0+R_1)}}{R_0+R_1}\int e^{i(\pi/2)u^2}\mathrm{d}u\int e^{i(\pi/2)v^2}\mathrm{d}v. \qquad [7.14]$$

容易变换[7.14]式的积分限。如果原来的积分限是 $\pm\infty$ (狭缝的情况),那么,在变换后的积分中,它们还是 $\pm\infty$,我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\pi/2)v^2}\mathrm{d}v=2\int_0^{\infty}e^{i(\pi/2)u^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\pi/4)}=1+i.$$

有限积分限间的同一积分

$$\int_{s-D}^{s}e^{i(\pi/2)u^2}\mathrm{d}u, \qquad [7.15]$$

叫做菲涅耳积分,并且被列成了表。

例 半无限平面边缘的衍射。

[7.14]式的第二个积分限显然是 $\pm\infty$,而第一个积分的积分限被取为从有限到无限。为了讨论积分[7.15]式,我们考虑如下定义的曲线:

$$X=\int_0^s\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\mathrm{d}u,\quad Y=\int_0^s\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\mathrm{d}u. \qquad [7.16]$$

由于$\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}\right)^2=1$,那么 s 是弧长。如果我们设$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}=$

$\cos\tau$, $\dfrac{dY}{ds}=\sin\tau$，那么 τ 是切线与 X 轴的交角。然而，曲率半径是 $\rho=ds/d\tau$，并由[7.16]式得到

$$\rho=\frac{1}{\pi s}. \qquad [7.17]$$

由[7.16]式定义的曲线是熟悉的考纽蜷线。例如，由[7.17]式能近似地把它画出来。(参看图 7.10)

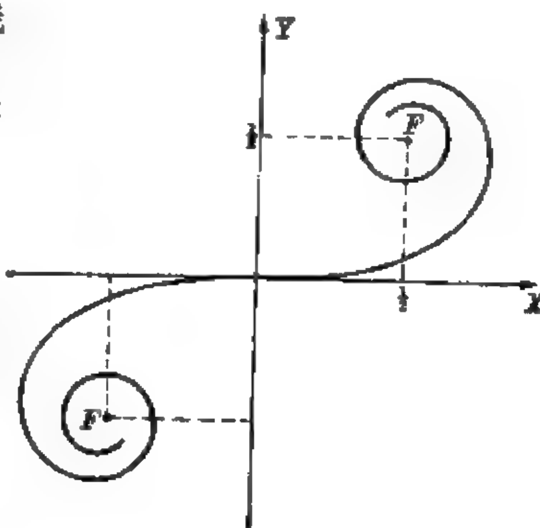


图 7.10

如果我们考察[7.15] 积分，那么我们看到

$$\left.\begin{aligned}\left|\int_0^s e^{i(\pi/2)u^2}du\right|^2&=X^2+Y^2\\ \left|\int_{s'}^s e^{i(\pi/2)u^2}du\right|^2&=(X-X')^2+(Y-Y')^2\end{aligned}\right\}. \qquad [7.18]$$

在图 7.11 中，坐标系是这样选取的，使得 LP 在屏上的投影落在 x-轴上，后者是垂直于屏边缘的。这样我们看到 ξ 的限是 $-\infty$

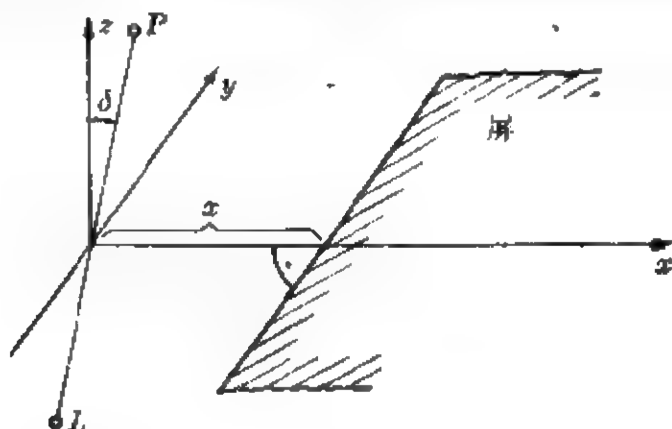


图 7.11

和 x，所以按照[7.13]式，u 的限是 $-\infty$ 和 $x\cos\delta\{k(R_0+R)/\pi R_0R_1\}^{\frac{1}{2}}$。由[7.18]式，我们认出沿考纽蜷线从原点走过距离

s(用正确的正负号)得到 $u(P)=u(s)$ 的强度比 $2I/I_0$, [其中 I_0 对应于未受扰的光传播, $e^{ik(R_0+R_1)}/(R_0+R_1)$,]并取值为由这样得到的点到螺线终点 F 的距离的平方。$s<0$ 的情况对应于几何影, 而 $s>0$ 对应于几何地被照明的一侧。特别是, 对于

$$s=+\infty, \qquad I/I_0=1;$$

$$s=0, \qquad I/I_0=\frac{1}{4} \quad (\text{影边界});$$

$$s=-\infty, \qquad I/I_0=0.$$

结果如图 7.12 所示。在影侧, 强度单调地减小; 然而, 在亮侧, 强度振荡。

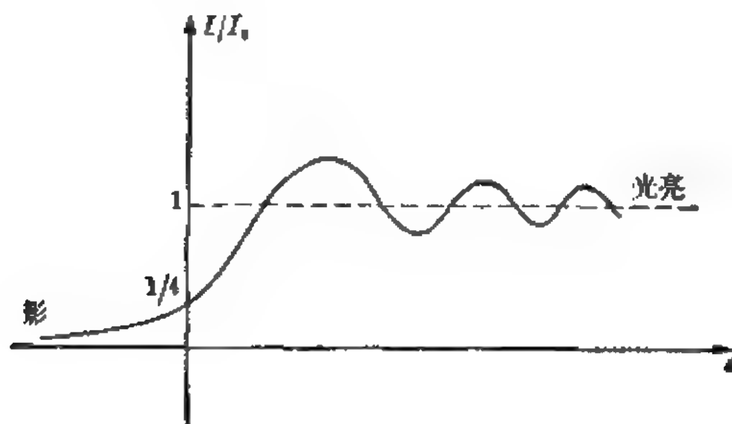


图 7.12

如果不是半无限平面而是宽度为 d 的狭缝, 那么除了现在第二个积分的限是 $s-D$ 和 s 外, 一切计算和前面相同, 其中

$$s=x\cos\delta\{k(R_0+R_1)/\pi R_0R_1\}^{\frac{1}{2}}$$

同前面一样,

$$D=d\cos\delta\{k(R_0+R_1)/\pi R_0R_1\}^{\frac{1}{2}}.$$

第三章　麦克斯韦理论

§8. 理论基础

后来发现，前章所阐明的标量波动光学与某些实验事实不符。就是说，人们可以演示某些只有在横向矢量波概念的基础上才能解释的光学现象(例如，双折射及反射引起的偏振)[①]。当能够指定与光传播相联系的矢量方向时，就说这光束偏振化了。实验上发现：

1. 偏振相同的光束的干涉同非偏振光一样。

2. 彼此垂直偏振的两光束不能干涉。(由此可以推断，光没有纵向分量。)此外，如果一光束中原来为互相垂直偏振的两个分量，即使被重偏振而使偏振方向重合，也不能干涉。

3. 如果匀偏振光重偏振多次，那么仅当最后光再成为匀偏振时才能干涉。

(实验上确定的)光波的纯横向性和(实验上确定的)它们的传播速度使人们猜测，假说中的振动光矢量应和磁场矢量 $\boldsymbol{H}$ 或电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 等同。正如在电动力学[②]中所证明的，这些场也满足波动方程。对于无电荷区域，并且是随时间[③]变化的过程，麦克斯韦方程组(对于 $\mu=1$)成立：

---

① 这两句从德文原版译出较好，故从德文原版。——中译本编注

② W. 泡利，物理学讲义：电动力学(M. I. T. 印刷所，1972)。

③ 英译本删去"周期的"一词。——中译者注

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}&=\operatorname{curl}\boldsymbol{H}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}&=-\operatorname{curl}\boldsymbol{E}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0 \end{aligned}\right\}. \qquad [8.1]$$

从熟悉的矢量恒等式

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\boldsymbol{A}-\operatorname{curl}\ \operatorname{curl}\boldsymbol{A},$$

得到

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \\ \nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0 \end{aligned}\right\}, \qquad [8.2]$$

从而看出相速是

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad [8.3]$$

把“光矢量”和 $\boldsymbol{E}$ 等同而得到的成功结果证明上述假说是对的。后来发现，以前标记为“光矢量”的矢量对应于 $\boldsymbol{H}$。在这种选择中，应该把“偏振面”理解为包含 $\boldsymbol{H}$ 和波法线的平面[A-2]。然而，光的大量效应该被认为是 $\boldsymbol{E}$ 的效应，因为按照电磁力的普遍定律，$\boldsymbol{E}$ 对静止的以及运动的电荷都施以力，而 $\boldsymbol{H}$ 却仅作用于运动电荷。所以，我们将总是运用 $\boldsymbol{E}$。为了保持和先前的结果一致，按照[8.3]式，我们必须令

$$n=\sqrt{\varepsilon}.$$

在电磁波中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是互相垂直的，而且垂直于光线的方向。

我们现在考虑一平面波，它满足[8.2]式并且沿 x 方向传播。这样，场的全部分量仅与变量 $(x-vt)$ 有关，所以

$$\partial/\partial y=\partial/\partial z=0, \quad \partial/\partial t=-c\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\partial/\partial x.$$

由此，立即看出，用这假说便得到[8.1]式和[8.2]式的两个单独的解：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ E_z,\ H_y\neq 0,\\ \quad 其余场强分量皆为零\\ (2)\ E_y,\ H_z\neq 0,\\ \quad 其余场强分量皆为零\end{array}\right\}. \qquad [8.4]$$

在这些情形中，麦克斯韦方程组[8.1]分别给出

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ H_y=-\sqrt{\varepsilon}\,E_z\\ (2)\ H_z=+\sqrt{\varepsilon}\,E_y\end{array}\right\}. \qquad [8.5]$$

这两个解对应于平面波偏振的两种类型；它们可以线性地叠加，并且这样得到的形式仍然是麦克斯韦方程组的解。

如所周知，由麦克斯韦方程组也得到能量守恒定律：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{S}+\frac{\partial W}{\partial t}=0, \qquad [8.6]$$

其中 $\boldsymbol{S}=(c/4\pi)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$，$W=1/8\pi(\varepsilon\boldsymbol{E}^2+\mu\boldsymbol{H}^2)$。

麦克斯韦方程组[8.1]也能写成积分形式。[8.1]式中包含旋度的公式和下列的积分形式

$$\left.\begin{array}{l}\oint H_s\mathrm{d}s=\frac{1}{c}\int\varepsilon\dot{E}_n\mathrm{d}f\\ \oint E_s\mathrm{d}s=-\frac{1}{c}\int\dot{H}_n\mathrm{d}f\end{array}\right\} \qquad [8.7]$$

等效。当 ε（例如，在界面处）变为不连续时，[8.1]式失效，但用[8.7]式却是很方便的。在这种情况中，如图 8.1 所示，在界面 F 处 ε 是有限不连续的，并且遍及长度 δ（δ 很小）的两部分积分是与 δ 相同数量级的。然而，[8.7]的第一个式右边的项也是 δ 数量级，



图 8.1

因为 $\dot{E}_t$ 无疑地保持有限。这样，得到

$$\int_1^2 E_s \mathrm{d}s - \int_{1'}^{2'} E_s \mathrm{d}s = O(\delta),$$

并由极限 $\delta \to 0$，我们得出结论，越过 ε 不连续地变化的面，$\boldsymbol{E}$(和$\boldsymbol{H}$)的平行分量保持连续：越过 ε 不连续地变化的面，$\boldsymbol{E}_t$，$\boldsymbol{H}_t$ 是连续的。 [8.8]

至此，我们在处理中是将 ε 当作物质常数，虽然情况并不是这样。只要假定时间相关性是周期性的 $\propto e^{-i\omega t}$，就可以将这点考虑进去。这时，$\partial/\partial t \sim -i\omega$，并由[8.1]式得到

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\varepsilon i\omega}{c}\boldsymbol{E} &= \mathrm{curl}\boldsymbol{H} \\ \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H} &= \mathrm{curl}\boldsymbol{E} \end{aligned}\right\}. \qquad [8.9]$$

其次可以把它变换成与时间无关的波动方程(类似于第二章的 $\nabla^2 u - k^2 u = 0$ 方程式)：

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} &= 0 \\ \nabla^2\boldsymbol{H} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\boldsymbol{H} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad [8.10]$$

对具体情况，是方程组[8.9]还是[8.1]更为合适，必须在实验事实的基础上判定。

§9. 非吸收媒质(菲涅耳公式)

如果令

$$k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2},$$

则方程组[8.10]具有形式为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \qquad [9.1]$$

的解(和类似的 $\boldsymbol{H}$ 的解)。因此，相速是 $v = c/\sqrt{\varepsilon}$，并且，象先前提示过那样，$n = \sqrt{\varepsilon}$(各向同性媒质)。

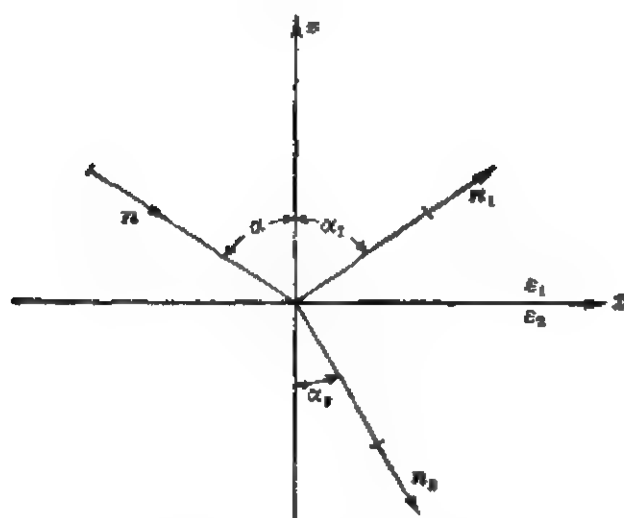


图 9.1

我们考虑越过平面时 ε 不连续变化的情况。由于[8.10]式有[9.1]形式的解，我们这样选取普遍光波场的初始条件，使得它们对应于在 x-z 平面内的入射平面波，与 z 轴成 α 角。(参看图 9.1)由[8.4]式，我们已看到麦克斯韦方程组(在假定平面波作为解的情况中①)有两组完全不同的解。这样，这里也必须分别地处理这两种情形:

第一种情形: $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面。

第二种情形: $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面。

然而，首先我们可以确信，如§6 中表明那样，位相在界面处的连续性导致一种媒质中的 ω 与另一种媒质中的 ω 相同，此外，$\alpha=\alpha_1$ 和 $\sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha_1=\sqrt{\varepsilon_2}\sin\alpha_2$ 或者 $\sin\alpha=n\sin\alpha_2$，其中 $n=\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$。这样，入射波、反射波和折射波的单位矢量 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，分别变为

$$\boldsymbol{n}=\{\sin\alpha, 0, -\cos\alpha\}, \qquad \boldsymbol{n}_1=\{\sin\alpha, 0, \cos\alpha\},$$
$$\boldsymbol{n}_2=\{\sin\alpha_2, 0, -\cos\alpha_2\}.$$

第一种情形，$\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面

① 由于选取的初始条件，这是会料想到的。

解的形式：$e^{-i\omega t}$ 遍乘全部场量。此外，$\boldsymbol{k}_i=k\boldsymbol{n}_i$，$\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{x}=s_i$。那么，很清楚

$$\left.\begin{aligned}E_y&=Ae^{ik_1s}\\H_x&=\sqrt{\varepsilon_1}A\cos\alpha e^{ik_1s}\\H_z&=\sqrt{\varepsilon_1}A\sin\alpha e^{ik_1s}\end{aligned}\right\},\quad\text{入射波；}$$

$$\left.\begin{aligned}E_y&=Be^{ik_1s_1}\\H_x&=-\sqrt{\varepsilon_1}B\cos\alpha e^{ik_1s_1}\\H_z&=\sqrt{\varepsilon_1}B\sin\alpha e^{ik_1s_1}\end{aligned}\right\},\quad\text{反射波；}$$

$$\left.\begin{aligned}E_y&=Ce^{ik_2s_2}\\H_x&=\sqrt{\varepsilon_2}C\cos\alpha_2e^{ik_2s_2}\\H_z&=\sqrt{\varepsilon_2}C\sin\alpha_2e^{ik_2s_2}\end{aligned}\right\},\quad\text{折射波。}$$

$|\boldsymbol{E}|$和$|\boldsymbol{H}|$间的关系，见[8.5]式。在[8.8]原理的基础上，由于在 $z=0$ 处，$k_1s=k_1s_1=k_2s_2$，

由 E_y 的连续性得到：

$$A+B=C,$$

由 H_x 的连续性得到：

$$(A-B)\cos\alpha=Cn\cos\alpha_2,$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\frac{B}{A}&=-\frac{\sin(\alpha-\alpha_2)}{\sin(\alpha+\alpha_2)}\\\frac{C}{A}&=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha_2}{\sin(\alpha+\alpha_2)}\end{aligned}\right\}。\qquad[9.2]$$

第二种情形。$\boldsymbol{E}$ 平行于入射面

令 $\boldsymbol{H}$ 在 $-y$ 方向，则 $\boldsymbol{E}$ 现在充当第一种情形中 $\boldsymbol{H}$ 的角色。

解的形式：（$|\boldsymbol{E}|$和$|\boldsymbol{H}|$的关系，见[8.5]式。）

$$\left.\begin{aligned}H_y&=-Ae^{ik_1s}\\E_x&=\varepsilon_1^{-1/2}A\cos\alpha e^{ik_1s}\\E_z&=\varepsilon_1^{-1/2}A\sin\alpha e^{ik_1s}\end{aligned}\right\},\quad\text{入射波；}$$

$$\left.\begin{aligned}H_y&=-Be^{ik_1s_1}\\E_x&=-\varepsilon_1^{-1/2}B\cos\alpha e^{ik_1s_1}\\E_z&=\varepsilon_1^{-1/2}B\sin\alpha e^{ik_1s_1}\end{aligned}\right\}，\text{反射波；}$$

$$\left.\begin{aligned}H_y&=-Ce^{ik_2s_2}\\E_x&=\varepsilon_2^{-1/2}C\cos\alpha_2 e^{ik_2s_2}\\E_z&=\varepsilon_2^{-1/2}C\sin\alpha_2 e^{ik_2s_2}\end{aligned}\right\}。\quad\text{折射波。}$$

平行分量的连续性导致

$$A+B=C,$$

$$(A-B)\cos\alpha=\frac{C}{n}\cos\alpha_2,$$

由此

$$\left.\begin{aligned}\frac{B}{A}&=\frac{\tan(\alpha-\alpha_2)}{\tan(\alpha+\alpha_2)}\\\frac{C}{A}&=\frac{2\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 2\alpha_2}\end{aligned}\right\}。\qquad [9.3]$$

讨论 由电动力学[①]得知，电磁波的强度 I 正比于坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$：

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H},\qquad I=|\boldsymbol{S}|.$$

对于平面波(这里是这种情况)也知道，$\boldsymbol{E}$ 垂直于 $\boldsymbol{H}$。因此，对于我们的情形，由[8.5]式，得到

$$I\propto|\boldsymbol{E}||\boldsymbol{H}|=|\boldsymbol{H}|^2/n=n|\boldsymbol{E}|^2. \qquad [9.4]$$

这样，只要不发生全反射，从而指数因子 $e^{i(ks-\omega t)}$ 的量值为 1[②]，对于第一种情形，由[9.2]式，反射强度和折射强度与入射强度之比，分别为

$$I_{\text{反}}:I_{\text{入}}=|B/A|^2,\qquad I_{\text{折}}:I_{\text{入}}=n|C/A|^2, \qquad [9.5]$$

而对于第二种情形，由[9.3]式

---

① W. 泡利. 电动力学。

② 这里量值指模数：$|e^{i(ks-\omega t)}|=[e^{i(ks-\omega t)}e^{-i(ks-\omega t)}]^{1/2}=1$。——中译本编注

$$I_{反}:I_{入}=|B/A|^2, \qquad I_{折}:I_{入}=|C/A|^2/n \qquad [9.6]$$

当然，垂直入射时，两组公式变成一样了：

$$I_{反}:I_{入}=\{(n-1)/(n+1)\}^2, \quad I_{折}:I_{入}=4n/(n+1)^2. \qquad [9.7]$$

掠入射时，$\alpha=\pi/2$，两种情形中都得到 $I_{反}:I_{入}=1$。此外，对于第二种情形，由[9.3]式看出，存在一个角度 α_p 使得 $I_{反}:I_{入}$ 等于零。当

$$\alpha_p+\alpha_2=\pi/2 \qquad [9.8]$$

时就是这样情况（因 $\tan\pi/2=\infty$）；即如果折射线和（不存在的）反射线互相垂直，就是这样情况。这就是布儒斯特定律。用[9.8]式确定的角 α_p 入射到反射面上的非偏振光，只有一个分量被反射。因此，反射光是线偏振的。

由于 E 矢量的垂直和平行于入射面而振动的分量发生不同的变化，那么斜线偏振光经折射和反射后仍然是线偏振的，虽然一般说来它的偏振面已旋转了。

关于全反射的情形，得到稍微不同的关系。由于公式[9.2]和[9.3]是麦克斯韦方程组的纯粹形式的解，那么它们当然也仍适用于这种情形。相反地，强度公式[9.5]和[9.6]不再适用了，因为指数因子的量值不再必需为1了。

为了发生全反射，按照第一章，我们必须假定 $n<1$ 并且 α 足够大，以致

$$\sin\alpha=n\sin\alpha_2$$

不再有 α_2 的实数解，这样，

$$\alpha>\alpha_t, \quad 其中 \quad \sin\alpha_t=n. \qquad [9.9]$$

这样定义的角 α_t 叫做全反射的极限角。

容易证明，若要 $\sin\alpha_2$ 是实数并且大于1，α_2 就必须是

$$\alpha_2=\pi/2-i\beta \qquad [9.10]$$

的形式，其中 β 是实数（只是由于习惯，β 前的符号写成负的）。用这个代换式[9.10]，如果完整地写出场强分量的表达式（包括指数

因子)，我们得到

$$\left.\begin{matrix} E_y \\ -H_y \end{matrix}\right\} = Be^{-i(\omega t - k_1 x_1)} = Be^{-i(\omega t - k_1 x\sin\alpha - k_1 z\cos\alpha)} \quad \text{反射波,} \tag{9.11}$$

和

$$\left.\begin{matrix} E_y \\ -H_y \end{matrix}\right\} = Ce^{-i(\omega t - k_2 x_2)} = Ce^{-i\omega t + ik_2 x\cosh\beta}e^{k_2 z\sinh\beta} \quad \text{折射波。} \tag{9.12}$$

这表示一种所谓表面波，因为仅在 x 方向有周期性，而在 z 方向却是指数衰减的。根据计算，可以看出坡印廷矢量是平行于折射平面的。两种偏振情况都得到 $I_{反}:I_{入}=1$，所以全部光线都反射了。相反地，要注意在反射中，两种情况的场强分量有不同的复数因子；就是说，倾斜于入射面的线偏振光，反射后变成椭圆偏振光。用[9.10]代换时，复数因子恰好是[9.2]式和[9.3]式给出的 B/A 值。

用菲涅耳公式，已得到几何光线理论的修正：甚至在全反射的情况下，按照[9.12]式也必须假定在第二种媒质中有一个波。实验上可以证明(象理论要求那样)，即使按照几何理论应该发生全反射时，光却总是透过 $n<1$ 的有限厚度层的。

§10. 吸收媒质(金属光学)

我们再次从麦克斯韦方程组出发，但假定所考虑的媒质具有导电性。那末，对于具有 $e^{-i\omega t}$ 周期性的过程，麦克斯韦方程组变为

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{curl}\,\mathbf{H} &= \left(-\frac{\varepsilon}{c}i\omega + \frac{4\pi\sigma}{c}\right)\mathbf{E} \\ \mathrm{curl}\,\mathbf{E} &= \frac{1}{c}i\omega\mathbf{H} \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

(因 $\partial/\partial t \sim -i\omega$)。我们可以重写这些方程式中的第一个:

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\left(-\frac{\varepsilon}{c}i\omega+\frac{4\pi\sigma}{c}\right)\boldsymbol{E}=-\frac{i\omega}{c}n'^2\boldsymbol{E},$$

其中,我们已定义

$$n'^2=\varepsilon'=\varepsilon+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \qquad [10.2]$$

此外,我们令

$$n'=n(1+i\kappa) \qquad (n,\kappa,\text{为实数}), \qquad [10.3]$$

和[10.2]式比较,于是得到

$$\left.\begin{aligned} n^2(1-\kappa^2)&=\varepsilon \\ n^2\kappa&=2\pi\sigma/\omega \end{aligned}\right\}. \qquad [10.4]$$

这样,麦克斯韦方程组[10.1]变为

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl}\boldsymbol{H}&=-\frac{i\omega}{c}\varepsilon'\boldsymbol{E} \\ \operatorname{curl}\boldsymbol{E}&=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H} \end{aligned}\right\}. \qquad [10.5]$$

除到处用 ε' 代换 ε 外,[10.5]式与周期过程的[8.1]式完全一样。这样,只要用 ε'(复数)代换 ε, n'(复数)①代换 n, 那么,先前形成的全部麦克斯韦方程组的解在这里也适用。

例如,在[9.1]式中,我们找到麦克斯韦方程组的解,过渡到现在的情形来,就变成

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \text{且有 } \boldsymbol{x}=\{x,0,0\}. \qquad [10.6]$$

其中(在现在的情形下)

$$k^2=\frac{\varepsilon'\omega^2}{c^2}, \qquad k=\frac{\omega}{c}n'=\frac{\omega}{c}(1+i\kappa)n.$$

这样,由[10.6]式我们得到(作为[8.4]式的特殊情形)

$$E_z=E_0e^{-(\kappa n\omega/c)x}e^{i((n\omega/c)x-\omega t)}. \qquad [10.7]$$

---

① (复数)两字是中译者加的——中译者注

由[8.5]式，对应的磁场强度是

$$H_y = H_0 e^{-(\kappa n\omega/c)x} e^{i((n\omega/c)x-\omega t)},$$

其中

$$H_0 = -n' E_0. \qquad [10.8]$$

[10.7]式表示其阻尼常数正比于 $\varkappa$ 的一个阻尼平面波。这里，n(不带撇的)也可以解释为折射率，因为 c/n 是相速。应该注意的是，按照[10.8]式，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 不再是同位相的了，因为 n' 是复数。

如果在上面方程中我们再设 $\sigma=0$，那么，得到 $\kappa=0$ 和 $n=n'$ 是实的。然而对金属的情形，$\sigma\neq0$。的确，σ 如此之大，以致$n^2\kappa\gg\varepsilon$；就是说，$\kappa\sim1$ 和 n 是很大的。

我们现在考虑入射到金属表面(平面)的线偏振平面波的情形，其入射角为 α，折射角为α_2。①(参看图 9.1)按照上面所提及的，如果用 ε' 代换 ε，n' 代换 n，两种偏振情况的菲涅耳公式[9.2]和[9.3]②仍然成立。由于对金属的假设，得到 $\cos\alpha_2\sim1$。

第一种情形。$\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面。

$$\frac{C}{A}=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha_2}{\sin(\alpha+\alpha_2)}\simeq\frac{2\cos\alpha}{n'}. \qquad [10.9]$$

这样，对于折射波，

$$\left.\begin{aligned}
E_y&=\frac{2A\cos\alpha}{n'}\exp\{i[k_1(x\sin\alpha-nz)-\omega t]+nk_1\varkappa z\}\\
H_x&=\sqrt{\varepsilon_1}\,2A\cos\alpha\exp\{i[k_1(x\sin\alpha-nz)-\omega t]\\
&\qquad+n\kappa k_1 z\}\\
H_z&=\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{2A}{n'}\cos\alpha\sin\alpha\exp\{i[k_1(x\sin\alpha-nz)-\omega t]\\
&\qquad+n\varkappa k_1 z\}
\end{aligned}\right\}.$$

[10.10]

① 德文原本为"…α_2 线偏振"。——中译者注

② 英译本误为[9.1]和[9.2]。——中译者注

对于完美金属[①] $n' \to \infty$，仅 H_z 保持有限(甚至对于 $z=0$)。

第二种情形。$\boldsymbol{E}$ 平行于入射面

$$\frac{C}{A}=\frac{2\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 2\alpha_2}\simeq 2. \qquad [10.11]$$

这样，对于折射波

$$\left.\begin{aligned}
H_y&=-2A\exp\{i[k_1(x\sin\alpha-nz)-\omega t]+n\varkappa k_1 z\}\\
E_x&=\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}\frac{2A}{n'}\exp\{i[k_1(x\sin\alpha-nz)-\omega t]\\
&\qquad\qquad+n\varkappa k_1 z\}\\
E_z&=\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha\frac{2A}{n'^2}\exp\{i[k_1(x\sin\alpha-nz)-\omega t\\
&\qquad\qquad+n\varkappa k_1 z\}
\end{aligned}\right\} \qquad [10.12]$$

因此，在完美金属($n'\to\infty$)的极限情况下，电场强度趋近于零(对于 $z=0$ 也一样)。然而，很清楚，必然是这样的，因为电流正比于 $\boldsymbol{E}$，并且我们已假定电导率 σ 是无限大的。

垂直入射，由[9.7]式，得到

$$\frac{I_{反}}{I_{入}}=\left|\frac{B}{A}\right|^2=\left|\frac{n'-1}{n'+1}\right|^2=\frac{(n-1)^2+n^2\varkappa^2}{(n+1)^2+n^2\varkappa^2}.$$

由此得到金属的重要公式

$$1-\frac{I_{反}}{I_{入}}=\frac{4n}{(n+1)^2+n^2\kappa^2}\simeq\frac{4n}{2n^2}=\frac{2}{n}\sim 2\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}.$$

按照[10.4]式，对于 $\kappa\to 1$ 得到

$$1-\frac{I_{反}}{I_{入}}=2\sqrt{\frac{c}{\lambda\sigma}}. \qquad [10.13]$$

反射光的椭圆性。我们假设场振幅为 $A_\perp$ 和 $A_\parallel$ 的线偏振光入射到金属表面上。那么，由[9.2]式和[9.3]式得到

$$\left(\frac{B}{A}\right)_\perp=-\frac{\sin(\alpha-\alpha_2)}{\sin(\alpha+\alpha_2)},\quad \left(\frac{B}{A}\right)_\parallel=\frac{\tan(\alpha-\alpha_2)}{\tan(\alpha+\alpha_2)}.$$

---

① "完美金属"这几个字是中译者加的。——中译者注

这样，

$$\frac{B_\perp}{B_\parallel}=-\frac{A_\perp}{A_\parallel}\frac{\cos(\alpha-\alpha_2)}{\cos(\alpha+\alpha_2)}.\qquad[10.14]$$

因为[10.14]式中余弦的商一般不是实数，所以反射光是椭圆偏振的。我们考察 $A_\perp/A_\parallel=1$ 的特殊情况；就是说，入射面和偏振面成 45° 角。此外，令

$$\frac{B_\perp}{B_\parallel}=\rho e^{i\Delta}.\qquad[10.15]$$

我们计算

$$\frac{1+\rho e^{i\Delta}}{1-\rho e^{i\Delta}}=-\frac{\sin\alpha\sin\alpha_2}{\cos\alpha\cos\alpha_2}.$$

然而，

$$\sin\alpha_2=\frac{1}{n'}\sin\alpha,$$

$$\cos\alpha_2=\frac{\sqrt{n'^2-\sin^2\alpha}}{n'},\qquad[10.16]$$

代入前式得到

$$\frac{1+\rho e^{i\Delta}}{1-\rho e^{i\Delta}}=-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}(n'^2-\sin^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}.\qquad[10.17]$$

由此我们看到，对于

$$\alpha=0:\quad \rho e^{i\Delta}=-1,\ \Delta=\pi,\ \rho=1,$$

$$\alpha=\pi/2:\quad \rho e^{i\Delta}=+1,\ \Delta=0,\ \rho=1;$$

没有椭圆性。

$\Delta=\frac{\pi}{2}$，因而 $e^{i\Delta}=i$ 时的入射角 $\alpha_主$ 叫做主入射角。对于这种情况，如果和 n'^2 相比，我们略去 $\sin^2\alpha_主$，由[10.17]式得到

$$\frac{1+i\rho_主}{1-i\rho_主}=-\frac{\sin^2\alpha_主}{\cos\alpha_主}\frac{1}{n'}.\qquad[10.18]$$

$\rho_主$ 和 $\alpha_主$ 是用实验测出，所以由[10.18]式即得光学常数：

$$n'=n(1+i\varkappa)=-\frac{\sin^2\alpha_主}{\cos\alpha_主}\left(\frac{1-i\rho_主}{1+i\rho_主}\right),$$

$$
\left.\begin{aligned}
n &= -\frac{\sin^2\alpha_{主}}{\cos\alpha_{主}}\left(\frac{1-\rho_{主}^2}{1+\rho_{主}^2}\right)\\
\kappa &= -\frac{2\rho_{主}}{1-\rho_{主}^2} = \tan 2\psi, \quad \rho_{主} = -\tan\psi
\end{aligned}\right\}. \qquad [10.19]
$$

后来发现，"常数"是和频率有关的。如果 ω 变得足够小，它们全都趋近静态值。

§11. 驻波

我们考虑入射到完美镜（$z=0$ 处，E_t 等于零）上的平面波。对两种偏振情形，我们得到下列结果：

a. E 垂直于入射面：$B/A=-1$

叠加入射波和反射波，得到

$$
\left.\begin{aligned}
E_y &= Ae^{-i\omega t+ik(x\sin\alpha-z\cos\alpha)} - Ae^{-i\omega t+ik(x\sin\alpha+z\cos\alpha)}\\
&= -2iAe^{-i\omega t+ikx\sin\alpha}\sin(kz\cos\alpha)\\
H_x &= \sqrt{\varepsilon_1}\,2Ae^{-i\omega t+ikx\sin\alpha}\cos\alpha\cos(kz\cos\alpha)\\
H_z &= -\sqrt{\varepsilon_1}\,2iAe^{-i\omega t+ikx\sin\alpha}\sin\alpha\sin(kz\cos\alpha)
\end{aligned}\right\}. \qquad [11.1]
$$

b. E 平行于入射面：$B/A=1$

$$
\left.\begin{aligned}
H_y &= -2Ae^{-i\omega t+ikx\sin\alpha}\cos(kz\cos\alpha)\\
E_x &= -\varepsilon_1^{-1/2}2iAe^{-i\omega t+ikx\sin\alpha}\cos\alpha\sin(kz\cos\alpha)\\
E_z &= \varepsilon_1^{-1/2}2Ae^{-i\omega t+ikx\sin\alpha}\sin\alpha\cos(kz\cos\alpha)
\end{aligned}\right\}. \qquad [11.2]
$$

垂直入射。两种情形都是一样的：

$$
\left.\begin{aligned}
E_y &= -2|A|\sin(\omega t+\delta)\sin kz\\
H_x &= \sqrt{\varepsilon_1}\,2|A|\cos(\omega t+\delta)\cos kz
\end{aligned}\right\}. \qquad [11.3]
$$

这样，

1. 在 $kz=\pi N$，$z=N\lambda/2$ 处，$\boldsymbol{E}$ 有波节。（第一个波节是在镜面上。）

2. 在 $kz=\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)$，$z=\frac{1}{2}\left(N+\frac{1}{2}\right)\lambda$ 处，$\boldsymbol{H}$ 有波节。

如果把这样的状态拍照下来，会发现第一个波节是在镜面上。这样，在光度学上人们测量的是$|E|^2$。这是可以在电子论的基础上理解的。

任意入射。在情形a中，由[11.1]式得到波节出现在$kz\cos\alpha=\pi N$或$z=(1/2)N\lambda\cos\alpha$处。在情形$b$中，由[11.2]式得到，对$\alpha\neq0$和$\alpha\neq\pi/2$，$|\mathbf{E}|^2=|E_x|^2+|E_y|^2\neq0$，因此不存在波节。由此能确定先前叫做“偏振面”的平面是平行于磁矢量$\boldsymbol{H}$，因此是垂直于矢量$\boldsymbol{E}$的。

第四章　晶体光学

§ 12. 波法线的关系

在讨论麦克斯韦理论时，我们曾假设媒质是各向同性的。然而，现在我们要假设$\boldsymbol{E}$不再平行于$\boldsymbol{D}$。因此，我们必须把麦克斯韦方程组写成最普遍的形式，然而其中再次假设磁导率$\mu=1$。当然，后来发现，在适用于光的高频率情形，$\mu(\omega)$接近于1。因此，①

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=0\\ \operatorname{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0\end{aligned}\right\}. \qquad [12.1]$$

由[12.1]式，得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{D}}, \qquad [12.2]$$

其中 div$\boldsymbol{E}$ 不再等于零。对于$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{E}$的关系，我们必须假设

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\cdot\boldsymbol{E}\ \text{或}\ D_i=\sum_k \epsilon_{ik}E_k, \qquad [12.3]$$

其中ϵ是电介质张量。坡印廷矢量变为

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}).$$

并且由能量守恒定律，得到（参较[8.6]式）

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\operatorname{div}\boldsymbol{S}=-\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{H}),$$

其中W是场能密度。由此，用[12.1]式，

---

① 德文原本中多了一句“对于周期过程”。——中译者注

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}H^2+\frac{1}{4\pi}E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}. \qquad [12.4]$$

当然，这必须是全微分，所以我们必须假设

$$E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}=D\cdot\frac{\partial E}{\partial t}, \qquad [12.5]$$

因为此时

$$\frac{1}{4\pi}E\cdot\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(E\cdot D).$$

把[12.3]式代入[12.5]式，得到

$$\sum_{ik}\varepsilon_{ik}E_i\dot{E}_k=\sum_{lm}\varepsilon_{lm}E_m\dot{E}_l,$$

或

$$\sum_{ik}(\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{ki})E_i\dot{E}_k=0,$$

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}. \qquad [12.6]$$

因此，能量守恒定律要求张量ϵ是对称的。然而，总是能够把这样的张量变换到主轴上的。本征值的特征方程是

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_{11}-\lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\lambda & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0. \qquad [12.7]$$

此外，我们知道，对应于特征方程两个不同根的主轴方向是互相垂直的。如果两个根是相等的，那么主轴的对应方向在平面中是不确定的。所以，可以把它们选取为正交的。对于(实的)对称张量，一切本征值都是实的。

下文中，我们假定在晶体每点都已变换到主轴了，所以张量ϵ是对角的而且可以写成如下形式：

$$(\varepsilon_{ik})=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}. \qquad [12.8]$$

因此，ε_i 叫做主介电常数。我们现在考虑麦克斯韦方程组的那些能用平面波表示的解。这样，一切场强都以平面波方式传播：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)},\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\\&\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}\frac{\omega}{v}=\boldsymbol{p}\frac{\omega}{c},\\&\boldsymbol{n}=\text{在传播方向上的单位矢量}\\&v=\text{相速}\\&p^2=\frac{c^2}{v^2}=n^2,\ n=\text{折射率}\end{aligned}\right\}. \qquad [12.9]$$

矢量 $\boldsymbol{n}$ 也叫做波法线(因为它垂直于恒相面)。我们有

$$\boldsymbol{p}=n\boldsymbol{n}.$$

现在把[12.9]式的形式代入麦克斯韦方程组[12.1]。得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\sim-i\omega,\ \frac{\partial}{\partial x}\sim i\boldsymbol{k}=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{p}, \qquad [12.10]$$

$$\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}, \qquad [12.11]$$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{D}=p^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})\\&\frac{1}{n^2}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\end{aligned}\right\}. \qquad [12.12]$$

由[12.11]式我们得出结论，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 垂直于 $\boldsymbol{p}$；并且 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, 和 $\boldsymbol{p}$ 在一个平面内。

[12.12]式与[12.3]式一起给出

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_i}\right)D_i+n_i\left(\sum_k\frac{D_k}{\varepsilon_k}n_k\right)=0. \qquad [12.13]$$

如果令

$$\lambda=\sum_k\frac{n_k}{\varepsilon_k}D_k, \qquad [12.14]$$

那么[12.13]式变为

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_i}\right)D_i+\lambda n_i=0. \qquad [12.15]$$

如果我们规定 λ 满足 div$\boldsymbol{D}=0$ 和[12.10]式得到的条件

$$\sum_k D_k n_k = 0, \tag{12.15a}$$

那么,[12.15]式和[12.13]式等价。(用 n_i 乘[12.15]式然后求和,便能直接得到这个条件。)这样,我们能用方程组[12.15]和[12.15a]代替[12.13]式。

解方程[12.15],得 D_i,

$$D_i = -\frac{\lambda n_i}{1/n^2 - 1/\varepsilon_i} = -\frac{\lambda n p_i}{1-p^2/\varepsilon_i}, \tag{12.16}$$

再取与 $\boldsymbol{p}$ 的标积,得到

$$2G = \sum_i \frac{n_i^2}{1/n^2 - 1/\varepsilon_i} = \sum_i \frac{p_i^2}{1-p^2/\varepsilon_i} = 0. \tag{12.17}$$

换一种写法,

$$2G = \sum_i \frac{p_i^2 - p^2 p_i^2/\varepsilon_i + p^2 p_i^2/\varepsilon_i}{1-p^2/\varepsilon_i} = \sum_i \left(p_i^2 + p^2 \frac{p_i^2/\varepsilon_i}{1-p^2/\varepsilon_i}\right)$$

$$= p^2 + p^2 \sum_i \frac{p_i^2/\varepsilon_i}{1-p^2/\varepsilon_i} = 0.$$

即

$$\sum_i \frac{p_i^2/\varepsilon_i}{p^2/\varepsilon_i - 1} = \sum_i \frac{p_i^2}{p^2-\varepsilon_i} = 1. \tag{12.18}$$

如果去掉[12.17]式的分母,那么

$$n_1^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right) + n_2^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

$$+ n_3^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right) = 0. \tag{12.19}$$

得出一个关于 $1/n^2$ 的二次方程。这样,一般说来,我们得到折射率的两个不同的根,每一个波法线对应着两个不同的相速。

特殊情形: $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$

由前面的讨论(参看对[12.7]式的讨论),这种情形暗示光学旋转对称,[12.19]式分为两个因子:

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left\{n_1^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)+(n_2^2+n_3^2)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\right\}=0. \quad [12.20]$$

第一种情形，第一个因子为零：$1/n^2=1/\varepsilon_2$。

对应的折射率是与波方向 $\boldsymbol{n}$ 无关的。这叫做寻常光线。如果我们把通过轴 2 和轴 3 的平面标称为主截面，那么我们可以说对应于寻常光线的 $\boldsymbol{D}$ 必定在主截面内，并且垂直于 $\boldsymbol{n}$。这是正确的，因为在[12.15]式中，λ 必须为零(我们设 $i=2$)；但对于 $i=1$，$(1/n^2-1/\varepsilon_1)\neq 0$，所以 $D_1=0$。这样，对于寻常光线，$\boldsymbol{E}$ 是平行于 $\boldsymbol{D}$ 的。(因为后者是在主截面内)。由[12.11]式，寻常光线的磁矢量于是变为

$$\boldsymbol{H}=n(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{D}. \quad [12.21]$$

如果 $\boldsymbol{n}$ 垂直于主截面(就是，平行于轴 1)，那么，在主平面内 $\boldsymbol{D}$ 的方向(因而寻常光线的方向)完全没有被表明。

第二种情形。[12.20]式中第二个因子为零：

$$n_1^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)+(n_2^2+n_3^2)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=0.$$

由此(因为 $\boldsymbol{n}^2=1$)，得到

$$\frac{1}{n^2}=\frac{n_1^2}{\varepsilon_2}+\frac{n_2^2+n_3^2}{\varepsilon_1}. \quad [12.22]$$

如果我们用 φ 代表 $\boldsymbol{n}$ 与轴 1 的交角，那么由[12.22]式得到

$$\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon_2}+\frac{\sin^2\varphi}{\varepsilon_1}=\frac{1}{n^2}. \quad [12.23]$$

这里，折射率与法线方向有关。这是非常光线。

我们考虑在 1-2 平面内(适当地选取轴 2 和轴3)的非常光线，故 $n_3=0$。那么，由[12.15]式得到

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)D_3=0 \quad 所以\ D_3=0.$$

这样，$\boldsymbol{D}$ 矢量在 1-2 平面内，并且垂直于 $\boldsymbol{n}$。如果我们考察类似的

寻常光线，那么我们知道它的 **D** 矢量是在主截面内并且垂直于 $\boldsymbol{n}$. 这样，我们得出结论：寻常光线和非寻常光线是互相垂直地偏振的。利用[12.21]式，这也可以表达为寻常光线的 **H** 和非常光线的 **D** 是同向的。

如果在[12.23]式中，我们设 $\varphi=0$，那么就不再能区别寻常光线和非常光线了。这样，在我们的特殊情形中，有一个(而且只有一个)方向是对应于[12.19]式中 $1/n^2$ 的重根。所以，这类晶体叫做光单轴的，并且有重根的方向是光轴。

普遍情形的几何解释。

令

$$\boldsymbol{x}=\text{常数}\times\boldsymbol{D}. \qquad [12.24]$$

由[12.16]式，因此

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=0. \qquad [12.25]$$

如果我们取椭球

$$\sum_i\frac{x_i^2}{\varepsilon_i}=1, \qquad [12.26]$$

并且使它和波平面[12.25]相截，那么交截成的椭圆主轴正比于折射率 n_1 和 n_2 的平方，这些折射率是属于波法线为 $\boldsymbol{n}$ 的平面波的那些偏振的，其 **D** 矢量沿着考虑中的主轴。这种陈述是和下面说法一样，即在辅助条件[12.25]和[12.26]下，折射率 n_1 和 n_2 的平方正比于二次型

$$\sum_i x_i^2=\text{极值} \qquad [12.27]$$

的极值。用适当地定义的常数，拉格朗日乘子法给出

$$\frac{x_i}{\varepsilon_i}-\mu x_i+\gamma n_i=0. \qquad [12.28]$$

如果我们取它和 x_i 的标积，那么，用[12.25]式和[12.26]式得到[12.27]的极值，

$$\left(\sum_i x_i^2\right)_{极值}=\frac{1}{\mu}. \qquad [12.29]$$

另一方面，$\boldsymbol{D}$ 满足[12.15]式并且由[12.24]式给出。把后者作为几何事实代入前者，给出椭球

$$\frac{x_i}{n^2}-\frac{x_i}{\varepsilon_i}+\lambda n_i=0, \qquad [12.30]$$

仅当 $\mu=1/n^2$，它才能和[12.28]式共存，所以

$$\left(\sum_i x_i^2\right)_{极值}=常数\times n^2. \qquad [证毕]$$

§ 13. 光线变量

a. 光线指数

我们也能够引进光线变量代替先前用的波变量。为定义它们，我们进行如下。[12.11]式是 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 间的关系。对于坡印廷矢量，我们有

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \qquad W=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+|\boldsymbol{H}|^2). \qquad [13.1]$$

我们现在定义光线速度 $\boldsymbol{U}$ 为

$$\boldsymbol{U}=\frac{\boldsymbol{S}}{W}=\frac{c}{s}\boldsymbol{t}. \qquad [13.2]$$

[13.2]式的第二部分同时定义光线指数 s 和光线矢量 $\boldsymbol{t}$.（我们已假定 $|\boldsymbol{t}|^2=1$.）对于各向同性媒质，光线指数 s 等于折射率 n，并且光线矢量 $\boldsymbol{t}$ 等于波法线矢量 $\boldsymbol{n}$. 然而，对于晶体，情况不再是这样了。求出光线指数和折射率的关系如下：

$$\frac{c}{s}\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{S}}{W}=\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{\frac{1}{2}\{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+|\boldsymbol{H}|^2\}}=\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|^2},$$

因为对于平面波，电能密度等于磁能密度。的确，由[12.11]式，得到

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}=-(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}=|\boldsymbol{H}|^2.$$

这样，由[12.11]式和[13.2]式得到

$$\frac{c}{s}\boldsymbol{t}=\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})}=-\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E})}=\frac{c\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{t}},$$

因此，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{t}=s$，或者

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=\frac{s}{n}. \qquad [13.3]$$

b. **对偶性**

如果除上列变量外，再引进变量

$$\boldsymbol{q}'=\frac{1}{s}\boldsymbol{t}, \qquad [13.4]$$

那么我们可以确信，如果用下列第二行代换第一行，本章所有方程式都仍然正确：

$$\begin{matrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{p} & n & \varepsilon_k & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{q}' & 1/s & 1/\varepsilon_k & \boldsymbol{t} & \boldsymbol{H}\end{matrix}. \qquad [13.5]$$

每一纵列中的二个对应变量叫做互为对偶。

倘若原方程式是正确的，那么从每个方程式代换[13.5]后得出一个正确的方程式来。这样，我们必须证明[12.11]式允许这种变换：

$$\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{H}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}|\boldsymbol{H}|^2-\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})$$

$$=cW\boldsymbol{E},$$

类似地，$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{S}=-cW\boldsymbol{H}$。然而，用 $\boldsymbol{S}=cW\boldsymbol{q}'$，

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{q}'\times\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{q}'\times\boldsymbol{D}, \qquad [13.6]$$

它们完全对应于[12.11]式。然而，其它一切关系也由此得出：通过代换 $n\to1/s$，$\boldsymbol{n}\to\boldsymbol{t}$，我们由 $\boldsymbol{p}$ 得到 $\boldsymbol{q}'$；并且通过代换 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{D}$ 和 $\varepsilon_k\to1/\varepsilon_k$，(对主轴的)方程式 $D_k=\varepsilon_kE_k$ 仍然正确。［证毕］

我们知道，坡印廷矢量的方向，因而(以及) $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{q}'$ 的方向是

能量输运的方向。这样，$\boldsymbol{q}'$ 是波包传播的方向，而且 $\boldsymbol{n}$ 是位相传播的方向。这样，借助于[13.5]的表，可以把 §12 中的一切解释直接地移到光线变量来。

c. 波法线和光线方向的关系

我们有[12.11]式和它们的对偶：

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{q}'. \tag{13.7}$$

由此，我们得到

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{q}'=(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{q}'=(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{H}, \tag{13.8}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{p}=-(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{H}, \tag{13.9}$$

所以

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{D}. \tag{13.10}$$

另一方面，我们有[12.12]式，

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}) \tag{13.11}$$

和它的对偶

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{q}'^2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{D}). \tag{13.12}$$

用分量形式(对于主轴)，

$$p_i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})=\boldsymbol{p}^2E_i-\varepsilon_iE_i. \tag{13.11'}$$

$$-q_i'(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{D})=E_i-q'^2\varepsilon_iE_i. \tag{13.12'}$$

用[13.11′]式除以[13.12′]式，并用[13.10]式得出

$$\frac{q_i'}{1-\varepsilon_iq'^2}=\frac{p_i}{p^2-\varepsilon_i}. \tag{13.13}$$

此外，我们有[12.17]式

$$\sum_i\frac{p_i^2}{1-p^2/\varepsilon_i}=0,$$

它的对偶是

$$\sum_i\frac{q_i'^2}{1-\varepsilon_iq'^2}=0, \tag{13.14}$$

而[13.3]式能够变换成

$$\sum_i p_i q'_i = 1. \qquad [13.15]$$

由[13.13]式得到[我们要计算 $q'_i = q'_i(p)$]

$$q'_i = \left(q'' - \frac{1}{\varepsilon_i}\right)\frac{p_i}{1-p^2/\varepsilon_i}$$

$$= \frac{1}{p^2}\left[(p^2q'' - 1) + \left(1 - \frac{p^2}{\varepsilon_i}\right)\right]\frac{p_i}{1-p^2/\varepsilon_i},$$

所以

$$p^2 q'_i = p_i + (p^2 q'' - 1)\frac{p_i}{1-p^2/\varepsilon_i}, \qquad [13.16]$$

或

$$p^2 q'_i - p_i = (p^2 q'' - 1)\frac{p_i}{1-p^2/\varepsilon_i}.$$

取矢量平方(就是说，把第 i 个分量平方然后加起来)并且用[13.15]式，得到

$$(p^2)^2 q''^2 - 2p^2 + p^2 = (p^2 q'' - 1)^2 \sum_i \frac{p_i^2}{(1-p^2/\varepsilon_i)^2}.$$

这样，

$$p^2 = (p^2 q'' - 1)\sum_i \frac{p_i^2}{(1-p^2/\varepsilon_i)^2}. \qquad [13.17]$$

令

$$K \equiv \sum_i \frac{p_i^2}{(1-p^2/\varepsilon_i)^2} = K(p), \qquad [13.18]$$

那么由[13.17]式得到

$$p^2 q'' - 1 = p^2/K,$$

代入[13.16]式，则

$$p^2 q'_i = p_i + \frac{p^2}{K}\,\frac{p_i}{(1-p^2/\varepsilon_i)},$$

所以

$$q'_i = p_i\left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{K}\,\frac{1}{(1-p^2/\varepsilon_i)}\right]. \qquad [13.19]$$

我们当然无需计算便可以写出相应的对偶方程(用代换表[13.5]):

$$p_i = q'_i\left[\frac{1}{q'^2} + \frac{1}{K'}\frac{1}{(1-q'^2 e_i)}\right], \qquad [13.20]$$

其中

$$K' \equiv \sum_i \left(\frac{q'_i}{1-q'^2 e_i}\right)^2.$$

同时,我们看出

$$K'/q'^2 = K/p^2. \qquad [13.21]$$

这样,解出了[13.13]式的 q'_i 和 p_i。

所有这些还能通过明显引入[12.17]式的函数 G 用另一种方法表示:

$$G = \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2}{1-p^2/e_i} = 0. \qquad [13.22]$$

然后微分,得到

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \frac{p_i}{1-p^2/e_i} + p_i\sum_k \frac{(1/e_k)p_k^2}{(1-p^2/e_k)^2}.$$

其中第二项是(参看[13.18]式)

$$\sum_k \frac{p_k^2/e_k}{(1-p^2/e_k)^2} = \sum_k \frac{\{(1/e_k - 1/p^2) + 1/p^2\} p_k^2}{(1-p^2/e_k)^2}$$

$$= \frac{1}{p^2}(-2G+K) = K/p^2.$$

因此,得到

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \frac{p_i}{1-p^2/e_i} + \frac{1}{p^2}Kp_i, \qquad [13.23]$$

与[13.19]式比较,得到

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = Kq'_i, \qquad [13.24]$$

$$K = \sum_i p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad [13.25]$$

(按照[13.13]式)。按照表[13.5],对应的对偶方程组是

$$F(q')=\frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i'^2}{1-\varepsilon_i q'^2}=0, \qquad [13.26]$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i'}=K'p_i, \qquad [13.27]$$

$$K'=\sum_i q_i'\frac{\partial F}{\partial q_i'}. \qquad [13.28]$$

d. 几何诠释。

1. 在§12中，我们已看到，对应于一给定波法线的折射率可以由一个平面和一个椭球相截得到。按照表[13.5]，这样也能够得到光线指数：如果椭球和平面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t}=0$ 相截，那么由截成的椭圆的主轴，正比于对应着光线方向 $\boldsymbol{t}$ 的两个光线指数的倒数 $1/s_1$ 和 $1/s_2$。

2. [13.22]至[13.25]式以及它们的对偶，[13.26]至[13.28]式，也可有几何注释。这里，对应于波法线 $\boldsymbol{p}$ 的光线方向，可以从原点作一垂线，到通过波法线 $\boldsymbol{p}$ 和叫做波面 $G(p)=0$ 的交点的切平面上而得到。确实是这样，因为[13.24]式说，矢量 $\boldsymbol{q}'$ 垂直于这切平面。垂线长度 R 是（参看[13.15]式）

$$R=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{t}=s(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}')=s. \qquad [13.29]$$

这样，长度恰好等于光线指数。所以，波面 $G=0$ 的垂足面（即，由垂线与波面切平面的交点的轨迹组成的曲面）是沿一切可能的光线方向，从原点量出对应于光线指数的距离 s 而得到的曲面。反过来，曲面 $G=0$ 当作下列平面的包络，这些平面作成垂直于长度为 s（等于对应的光线指数）的向径并通过其端点的平面。对偶

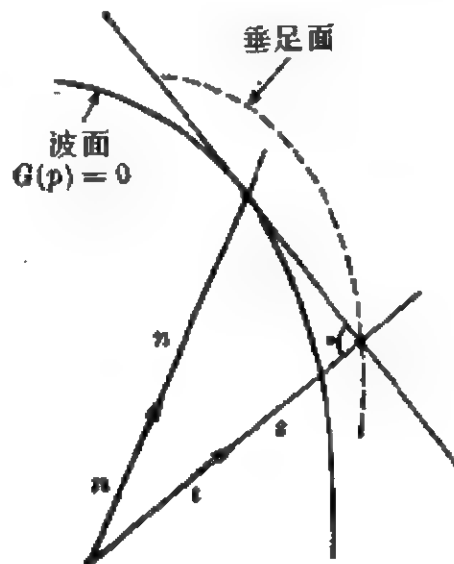


图 13.1

结构当然也适用：对应于给定光线方向的波法线，可以从原点作一垂线，到通过光线矢量 $\boldsymbol{q}'$ 和叫做光线面 $F(q')=0$的交点的切平面上而得到。这垂线的长度 Q 是 $1/n$，就是说，恰好等于折射率的倒数。因而，光线面 $F=0$ 的垂足面(即，垂线和光线面的切平面的交点轨迹)是这样的曲面，它是由沿一切可能的波法线方向从原点量出一段距离 $1/n$ (对应的折射率的倒数)而得到。反过来，作为平面的包络得到曲面 $F=0$，这些平面是垂直于长度为 $1/n$($n=$对应的折射率)的向径的平面。

3. 矢量 $\boldsymbol{q}'$ 和波运动学定义的群速之间存在一个关系：

$$\boldsymbol{U}=c\boldsymbol{q}'. \qquad [13.30]$$

[证明]：作为证明，必须证明 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{q}'$ 满足同样的方程式。由先前的讨论，我们有

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}n\boldsymbol{n}=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{p}=k_0\boldsymbol{p} \quad 其中\ k_0\equiv\frac{\omega}{c},$$

所以 $p_i=\frac{k_i}{k_0}$. 群速 $\boldsymbol{U}$ 定义为

$$\boldsymbol{U}=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}},\quad \omega=\omega(k_1,k_2,k_3).$$

由上面二式得到

$$\boldsymbol{U}=c\frac{\partial k_0}{\partial\boldsymbol{k}}.$$

为了证明，我们引进变量 k_0, k_1，k_2 和k_3(齐次坐标)代替函数 G 中的 p_i，

$$G=\frac{1}{2}\sum_i\frac{p_i^2}{1-p^2/\varepsilon_i}=\frac{1}{2}\sum_i\frac{k_i^2}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2/\varepsilon_i}(=0). \qquad [13.31]$$

因为[13.31]式定义了一个 k_0, k_1, k_2, k_3 的零齐次函数，那么欧勒关系成立：

$$k_0\frac{\partial G}{\partial k_0}+\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{k}}=0. \qquad [13.32]$$

现在，k_0 必须是这样的k_i的函数，使得对于 k_i 的变化（过渡到相邻的波法线），形式 G 必须仍旧为零。这就导致条件

$$\frac{\partial G}{\partial k_0}\frac{\partial k_0}{\partial k_i}+\left(\frac{\partial G}{\partial k_i}\right)_{k_0}=0, \qquad \text{或} \quad \frac{1}{k_0}\frac{\partial G}{\partial p_i}=-\frac{\partial G}{\partial k_0}\frac{\partial k_0}{\partial k_i}.$$

由此，用欧勒关系[13.32]，进一步得到

$$\frac{\partial G}{\partial p_i}=-k_0\frac{\partial G}{\partial k_0}\frac{\partial k_0}{\partial k_i}=\left(\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{k}}\right)\frac{\partial k_0}{\partial k_i}=\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_0}\cdot\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}\right)\frac{\partial k_0}{\partial k_i}$$

$$=\left(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}\right)\frac{\partial k_0}{\partial k_i}.$$

与[13.24]式比较，得到

$$q_i'=\frac{\partial k_0}{\partial k_i},$$

或

$$q_i'=\frac{1}{c}\frac{\partial \omega}{\partial k_i}=\frac{1}{c}U_i. \qquad \text{[证毕]}$$

结束这几分节时，我们可以指出，这里 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}'$，和$G$ 起着几何光学里(参看 § 3b)用同样符号标记的量的类似作用。

§ 14. 奇异性

存在着奇异方向，在这些方向中没有唯一的光线方向和已给定的一个波法线相对应(当然，对于对偶量也如此)。这是确定折射率的 [12.17] 式或 [13.31] 式有重根时的情况。在这种情况下(在主轴系统中)，有

$$2G=\sum_i\frac{n_i^2}{1/n^2-1/\varepsilon_i}=0.$$

用缩写，令

$$N=\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right),$$

则

$$2NG=n_1^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)+n_2^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)$$
$$+n_3^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=0.$$

如果 $NG=0$有重根，那么也必须$(NG)'=0$，其中撇表示对$(1/n^2)$微分，这给出

$$\left.\begin{aligned} NG&=0\\ (NG)'&=0\end{aligned}\right\}\quad \text{(重根的定义)},$$

所以，

$$NG'=0.\text{①}$$

容易证明，G'不能为零。所以，在$1/n^2$上有重根时，

$$N=\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)=0.$$

例如，$n^2=\varepsilon_2$时就是这种情况。此外，所有ε_i都应是不同的。因此得到

$$2NG=n_2^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)=0,$$

所以 $$n_2=0.$$

代入NG的普遍公式中，那么得到

$$2NG=\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left\{n_1^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)+n_3^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\right\}.$$

对于重根，花括号内的量必须也等于零：

$$n_1^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)+n_3^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=0.$$

只有这两个圆括号项反号时，这方程才能满足。因此，

$$\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3\text{(或反过来也是一样)},\tag{14.1}$$

并且对于发生重根的方向得到

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\pm\sqrt{\frac{1/\varepsilon_1-1/\varepsilon_2}{1/\varepsilon_1-1/\varepsilon_3}}=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_3(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)}}\\ b_2&=0\\ b_3&=\pm\sqrt{\frac{1/\varepsilon_2-1/\varepsilon_3}{1/\varepsilon_1-1/\varepsilon_3}}=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_3-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)}}\end{aligned}\right\}.\tag{14.2}$$

① 德文原本为$(NG)'=N'G+NG'=0$。但$G=0$，所以$NG'=0$。——中译者注

这样，存在两个这样内禀地不同的方向，它们叫做双法线或[①]（法线）光轴[②]。按照普遍图解，椭球 $\sum_i x_i^2/\varepsilon_i=1$ 被平面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 截得对应于给定波法线的折射率。如果 $\boldsymbol{n}$ 是沿双法线方向，那么交线是圆并且双法线通过它的中心和前面说过的椭球[③]的脐点[④]。因为圆没有主轴，所以，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是不确定的。仅要求 $\boldsymbol{D}$ 必须垂直于双法线。现在，由[12.11]式以及它们的对偶，我们知道 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{n}$（在我们的情况中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}$）同在一平面内。（参看图 14.1）然而，$\boldsymbol{D}$ 能够有垂直于 $\boldsymbol{b}$ 的任意方向，所以整个图对绕 $\boldsymbol{b}$ 旋转来说是不确定的。这样，我们看到 $\boldsymbol{t}$ 是在一个锥面上。应该注意，角是和方位角有关的，所以一般说来，$\boldsymbol{t}$ 不是在一个圆锥面上。这样，我们已证明了在本节开始处所断言的假设：如果折射率是 [12.7] 式的重根，那么，没有唯一的光线方向和已给定的一个波法线相对应。

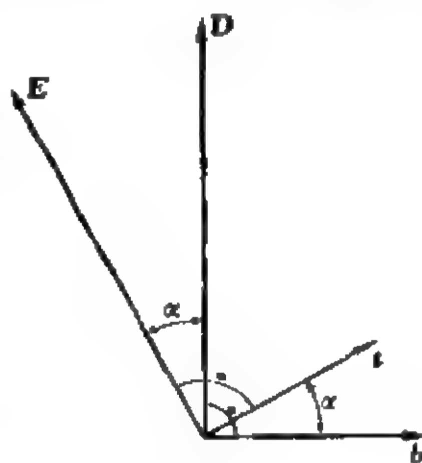


图 14.1

我们现在要推导出这个锥面方程。在主轴系中（它在垂直于 $\boldsymbol{b}$ 的平面内是任意的），$\boldsymbol{D}$ 有下列分量：

$$\boldsymbol{D}=\{-\lambda b_3,\ \mu,\ \lambda b_1\},\qquad [14.3]$$

因为这时它和 $\boldsymbol{b}$ 的标积等于零，这样，$\boldsymbol{E}$ 变成

$$\boldsymbol{E}=\left\{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}b_3,\ \frac{\mu}{\varepsilon_2},\ \frac{\lambda}{\varepsilon_3}b_1\right\}.\qquad [14.4]$$

---

① binormals or optic axes 这里译为（重根）双法线或（双）法线光轴较为确切。——中译本编注

② "光轴"这一词是英译者加的。——中译者注

③ 德文原本是椭球，英译本误为椭圆。——中译者注

④ 英译者注：如果我们考察一族平行平面，每个与二次曲面相截成圆，那么，这些平面与曲面相切的点叫做二次曲面的脐点。

欲求的锥面的母线具有 $\boldsymbol{t}$ 的方向，因而，是垂直于 $\boldsymbol{E}$ 并且在包含 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的平面内。这导致要求

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{x})=0,\quad 和\quad \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}=0,$$

其中我们用 $\boldsymbol{x}=\{\Xi, H, Z\}$ 表示在主轴系中锥面上任一点的坐标。写成分量形式，则

$$b_1(E_2Z-E_3H)+b_3(E_1H-E_2\Xi)=0,$$

和

$$E_1\Xi+E_2H+E_3Z=0.$$

把[14.4]式代入这些方程式中有

$$b_1\left(\frac{\mu}{\varepsilon_2}Z-\lambda\frac{b_1}{\varepsilon_3}H\right)+b_3\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}b_3H-\frac{\mu}{\varepsilon_2}\Xi\right)=0,$$

和

$$-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}b_3\Xi+\frac{\mu}{\varepsilon_2}H+\frac{\lambda}{\varepsilon_3}b_1Z=0.$$

由此，我们消去 λ/μ，得

$$(b_1Z-b_3\Xi)\frac{\mu}{\varepsilon_2}=\lambda H\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_2^2}{\varepsilon_1}\right),$$

$$H\frac{\mu}{\varepsilon_2}=\lambda\left(\frac{b_3}{\varepsilon_1}\Xi-\frac{b_1}{\varepsilon_3}Z\right),$$

并且，相除得

$$(b_1Z-b_3\Xi)\left(\frac{b_3}{\varepsilon_1}\Xi-\frac{b_1}{\varepsilon_2}Z\right)=H^2\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right). \qquad [14.5]$$

很清楚，[14.5]式是一个椭圆锥方程。用[14.2]式代换 b_i，得到

$$0=\Xi^2(\varepsilon_3-\varepsilon_2)+H^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$$

$$+Z^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-\Xi Z\sqrt{\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(\varepsilon_3-\varepsilon_2)}{\varepsilon_3\varepsilon_1}}(\varepsilon_3+\varepsilon_1).$$

可以把[14.5]式进一步变换如下，使得锥的几何形状变得更清楚。由[14.5]式，得到

$$H^2\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right)+Z^2\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\Xi Zb_1b_3\left(-\frac{1}{\varepsilon_3}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+\Xi^2\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}=0,$$

$$\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right)\left(\Xi^2+H^2+Z^2\right)-\left(Z^2\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}+\Xi^2\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}\right)$$
$$+\Xi Z b_1 b_3\left(-\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=0,$$
$$\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right)(\Xi^2+H^2+Z^2)-(Zb_3+\Xi b_1)\left(Z\frac{b_3}{\varepsilon_1}+\Xi\frac{b_1}{\varepsilon_3}\right)=0. \qquad [14.6]$$

由[14.6]式我们看出，那里定义的锥与平面

$$\Xi b_1+Zb_3=C \qquad [14.7]$$

(即波平面)的交线和球面

$$\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right)(\Xi^2+H^2+Z^2)-C\left(Z\frac{b_3}{\varepsilon_1}+\Xi\frac{b_1}{\varepsilon_3}\right)=0$$

与波平面[14.7]的交线是一样的。这样，我们得到重要的定理：垂直于双法线的平面截对应光线锥成圆。此外，我们知道光线锥表面应包含矢量 $\boldsymbol{b}$ (我们只需选取 $\boldsymbol{D}$ 平行于 2-方向)，并且整个几何相对于 1-3 平面毕竟①是对称的。$\boldsymbol{b}$ 和在 1-3(对称)平面中的其他母线间的夹角 α'，是锥开口的量度(很明显，对于椭圆锥的情况我们不能谈开口角)，它也是在 1-3 平面内 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的夹角。然而，后者的角度是很容易计算的：

$$\begin{aligned}\tan\alpha' &= \tan[(\boldsymbol{E},\boldsymbol{D})\,(\text{在主平面内})]\\ &= \pm\tan[(\boldsymbol{E},1)-(\boldsymbol{D},1)]\\ &= [\tan(\boldsymbol{E},1)-\tan(\boldsymbol{D},1)]/[1+\tan(\boldsymbol{E},1)\tan(\boldsymbol{D},1)],\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{D}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$

$$\tan(\boldsymbol{D},1)=D_3/D_1=-b_1/b_3,$$
$$\tan(\boldsymbol{E},1)=E_3/E_1=D_3\varepsilon_1/(D_1\varepsilon_3)=-b_1\varepsilon_1/(b_3\varepsilon_3),$$

所以

$$\pm\tan\alpha'\equiv\pm\tan(\boldsymbol{E},\boldsymbol{D})=\frac{-\varepsilon_1 b_1 b_3+\varepsilon_3 b_1 b_3}{\varepsilon_3 b_3^2+\varepsilon_1 b_1^2}.$$

① 英译本未译出"毕竟"此词。——中译者注

如果把从[14.2]得到的b_1和b_3代入，并整理各项，则得到

$$\tan\alpha'=\sqrt{\frac{(\varepsilon_3-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_3}}. \qquad [14.8]$$

对偶量的全部讨论可以完全类似地作出。最重要的定理于是如下。

存在奇异方向，在这些方向中没有唯一的法线方向和已给定的一个光线方向相对应。这是确定光线折射率的方程有重根时的情形。这种光线方向叫做双光线或光线光轴，它们的方向余弦是

$$r_1=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_3-\varepsilon_1}},\quad r_2=0,\quad r_3=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_2}{\varepsilon_3-\varepsilon_1}}.$$

对应的波法线是在和垂直于双光线的平面截成圆的锥上。与上面讨论的角α'对应的角β'(波锥开口的量度)由下式给出

$$\tan\beta'=\sqrt{\frac{(\varepsilon_3-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2^2}}. \qquad [14.8']$$

从表[13.5]和双法线的对应公式，无需计算也能得到这些结果。

§15. 光进入和离开晶体

考虑图15.1所示的情况，这里也有折射定律：

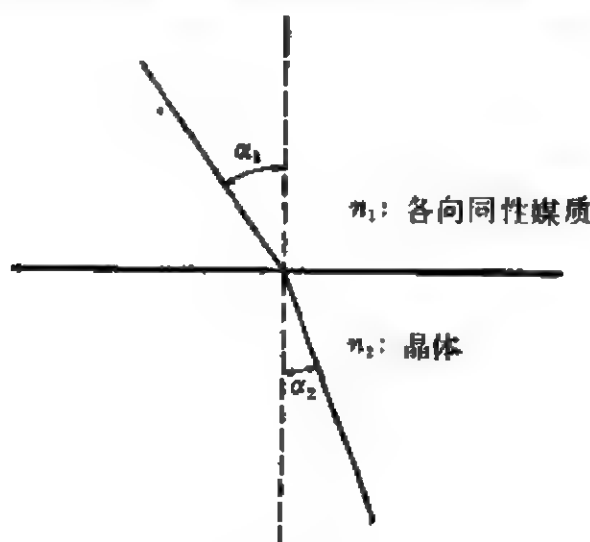


图 15.1

$$\left.\begin{aligned}n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2\\ n_2=n_2(\alpha_2)\end{aligned}\right\}. \qquad [15.1]$$

解析地求解[15.1]方程组是很复杂的。然而，惠更斯指出了从而能容易看出各种关系的全貌的一种图解。令 $A_1B_1$①是平面波等相面入射到晶体上的一部分侧视图（等相面垂直于图 15.2②的平

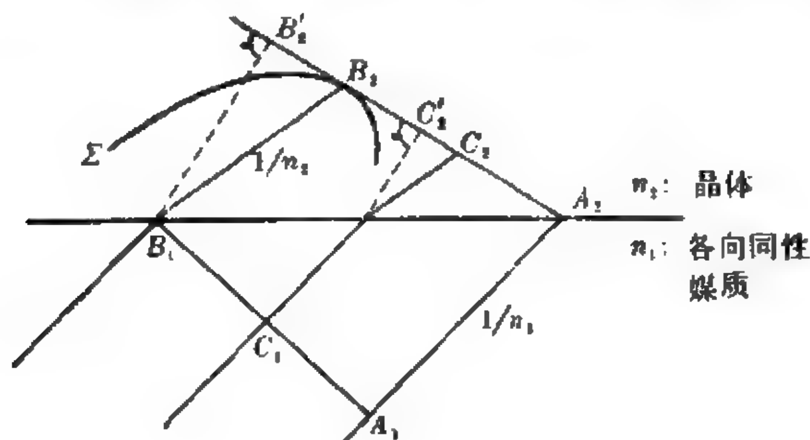


图 15.2

面）。作图如下：由B_1到B_2的光程等于由 A_1 到 A_2 的光程；就是说，曲面Σ是这样定义，使得由 B_1 画到Σ 的每根线的长度等于与这线方向对应的折射率的倒数。容易看出，通过 A_2 且垂直于图平面并与面Σ 相切的平面是等相面（不管在 A_1B_1 上什么地方选取 C_1 点，C_1 到C_2的光程总是相同的）。当然，接触点不必要在图的平面内（如同这里为简单起见画的那样）。由于波法线总是垂直于等相面，作垂线 B_1B_2' 到上述切平面便得到波法线。于是用先前的作图能够找到对应的光线方向。应该注意，面 Σ 由两叶组成；这样，对于入射到晶体上的一个平面波，在晶体内存在两个波法线和

① 德文原本的图中字母 A_1, B_1 在英译本中分别对应于 B_1, A_1；在德文原本中本句为"令 B_1B_2（按中译本图）为入射到晶体上的一平面光波束的一部分的截面（等相面垂直于图面）"。——中译者注

② 图 15.2 是按英译本图译出。——中译者注

两个光线方向。一平面波分裂为二，一条光线也分成两条。[1][2]

如果法线方向(B_1B_2')对应于晶体内的一双法线，便发生奇异性，即产生内锥形折射。折射光线于是形成一锥面(参看§14)。如果光线以发生内锥形折射的角度通过平行平面晶体片，那么，光线射出宛如一个椭圆筒。

对应的对偶现象是外锥形折射。如果在晶体内平行于双光线方向的光线从晶体射出，那么，出射波法线是在由晶体内不确定波法线的折射所产生的锥面上，而这些不确定的波法线是和双光线对应并且在一个锥面上的。适当地选择入射到一晶片[3]的会聚光束，在这种情况下，[4]会在晶体内形成单一的光线并且从另一侧射出发散光束来。[A-5]

---

① 英译者注：这种现象称为双折射。

② 这句是按德文原本译出，英译本为"平面波分裂为二，象光线那样"。——中译者注

③ 英译本译为"一个晶体平面"。——中译者注

④ 英译本译为"…作为这个现象的结果，…"。——中译者注

第五章　分子光学

§ 16. 无阻尼振子的色散

我们现在对在其中发生光学现象的媒质作某些特殊假设，从而来尝试解释光学常数。

我们假设带电粒子遍布整个被考虑的媒质。通常用连续分布代替不连续分布就足够了。如果

$$\sum_k e_k = 0, \tag{16.1}$$

其中$\sum\limits_k$是遍及单位体积内全部质点之和，e_k是第k个质点的电荷，那么我们用

$$\boldsymbol{P} = \sum_k e_k \boldsymbol{x}_k \tag{16.2}$$

代表单位体积中的电偶极矩。电流密度是

$$\boldsymbol{i} = \dot{\boldsymbol{P}} = \sum_k e_k \boldsymbol{v}_k. \tag{16.3}$$

为了许多目的，可以假设正和负电的质点是同一类型的，所以我们能够写

$$\boldsymbol{P} = N_+ e_+ \boldsymbol{x}_+ + N_- e_- \boldsymbol{x}_-, \tag{16.4}$$

其中$N_\pm$, $e_\pm$, $\boldsymbol{x}_\pm$分别代表两类质点的单位体积中的质点数、电荷和电荷中心位置。

这类媒质的麦克斯韦方程组是

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{curl}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}} \qquad & \mathrm{div}\boldsymbol{H} &= 0 \\ \mathrm{curl}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \qquad & \mathrm{div}\boldsymbol{D} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{16.5}$$

此外，必须加上 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系：

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}. \qquad [16.6]$$

象以前一样，这里我们已假定 $\mu=1$ (无磁化)。对于有时间因子 $e^{-i\omega t}$ 的周期性波场，我们已看到 $\boldsymbol{D}=n^2\boldsymbol{E}$，所以用[16.6]式，得到

$$4\pi\boldsymbol{P}=(n^2-1)\boldsymbol{E}. \qquad [16.7]$$

于是，麦克斯韦方程组有相速为 c/n 波形式的解。

此外，我们将假设媒质的带电质点在外部作用下表现为准弹性振子。那么，作用在质点上的回复力是

$$\boldsymbol{K}=-f\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是自平衡位置的位移。没有外力时，质点的运动微分方程是

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}+f\boldsymbol{x}=0, \quad m\omega_0^2=f. \qquad [16.8]$$

这种假设是和锐谱线的出现一致的。

现在，假定电场作用于媒质。这导致一个附加力

$$\boldsymbol{K}_A=e\boldsymbol{E} \qquad [16.9]$$

作用在质点上，所以

$$m(\ddot{\boldsymbol{x}}+\omega_0^2\boldsymbol{x})=e\boldsymbol{E}. \qquad [16.10]$$

如果电场是周期性的，就是说，如果

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}, \qquad [16.11]$$

那么[16.10]式容许有形式：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0e^{-i\omega t}. \qquad [16.12]$$

的解。将[16.12]式代入[16.10]式，得出

$$m(-\omega^2+\omega_0^2)\boldsymbol{x}_0=e\boldsymbol{E}_0, \qquad [16.12']$$

所以

$$\boldsymbol{x}_0=\frac{e}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}\boldsymbol{E}_0 \qquad [16.13]$$

和

$$x=\frac{e}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}E.\qquad[16.14]$$

由此,即得出电极化强度和折射率的公式。如果 N_0 是单位体积中自由振动频率为 ω_0 的质点数,那么,(如果电场 E 不存在时,不存在电极化强度的话)

$$P=N_0\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}E,\qquad[16.15]$$

并且由[16.7]式

$$n^2-1=4\pi N_0\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}.\qquad[16.16]$$

如果有几种类型的振子,例如单位体积中频率为 ω_k 的质点数 N_k,那么得到

$$n^2-1=4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2)}.\qquad[16.16']$$

当然,这里已作根本的假设:在边长为一个波长的立方体内的质点数是很大的。对于X光的情形,这就不再正确了。

[16.16′]式只是有条件地正确的,因为场强 E 不等于产生极化的场强 E'。[16.10]式中的场强应理解为激发场,而[16.7]式中的场强应理解为平均场。在电动力学中对克劳修斯-莫索提方程的推导已确定了 E 和 E' 的关系:

$$E=E'-\varphi P,\qquad[16.17]$$

其中对于各向同性体

$$\varphi=4\pi/3.\qquad[16.17']$$

经这种改正,得到

$$\left.\begin{aligned}&4\pi P=(n^2-1)E'-\frac{4\pi}{3}(n^2-1)P\\&\text{或}\\&\frac{4\pi}{3}(n^2+2)P=(n^2-1)E'\end{aligned}\right\}.\qquad[16.18]$$

这是现在必须(把它)代到[16.15]式中的方程式。于是，得到

$$3\frac{n^2-1}{n^2+2}=4\pi N_0\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)},\qquad [16.19]$$

或者，如果我们再次容许几类质点，则

$$3\frac{n^2-1}{n^2+2}=4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2)}.\qquad [16.19']$$

当然，甚至连这个方程式也是不正确的，因为[16.19]式右端在 $\omega=\omega_k$ 处有一个极点。因此，以后我们将不得不假定阻尼力。目前，我们要稍进一步探索从这个准弹性的带电质点模型得出的结果。

***a*. 分子折射度**[①]

1. 设运动的质点是电子，M是被考察物质的分子量，ρ 是密度。我们定义"分子折射度"R为

$$R=\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{M}{\rho}.\qquad [16.20]$$

于是，由[16.19′]式，得到

$$R=\frac{4\pi}{3}A\sum_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{f_k}{(\omega_k^2-\omega^2)}.\qquad [16.21]$$

这里，A 是阿伏伽德罗数，f 是每个真实的分子的振子数。按照我们的模型，可以企望 f_k 是整数(因为它们被认为是振动的质点)。实际上，甚至连氢原子(单电子)都有很多这样的"振子"，并且只有振子的所有这些"数目"之和等于分子中的电子数 Z：

$$\sum_k f_k=Z.\qquad [16.22]$$

这样，f_k 叫做对应于频率 ω_k 的振子强度[A-6]。

对于极限情况 $\omega\gg\omega_k$(对于所有 k)，由[16.21]式和[16.22]式得到

① 这里从德文 Molekular Refraktion 译出。——中译本编注

$$R\sim\frac{4\pi}{3}A\frac{e^2}{m\omega^2}Z.$$

(这里，e 和 m 是电子的常数。)在这种极限情形中，电子被认为是自由的。

2. 设运动的质点是原子核。对于双原子分子的振动，我们有 $f=1$ 和 $1/m=1/M_1+1/M_2$，其中 M_1 和 M_2 是原子核的质量。因为振子强度是一个整数，这个振动质点模型不象 1 中那样分成细项。

b. 能量守恒

我们再忽略 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的差别。坡印廷矢量是

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H},$$

所以，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{H}).$$

然而，由于我们有熟悉的能量方程

$$\mathrm{div}\boldsymbol{S}+\dot{W}=0,$$

如果我们仍旧用麦克斯韦方程组[16.5]和[16.6]，则得

$$\dot{W}=\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{H}}+\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{E}})+\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{P}}.$$

然而，单位体积中，我们有

$$\boldsymbol{P}=\sum_k N_k e_k \boldsymbol{x}_k$$

而且

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_k+\omega_k^2\boldsymbol{x}_k=\frac{e_k}{m_k}\boldsymbol{E},$$

所以得到

$$\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{P}}=\sum_k N_k m_k\dot{\boldsymbol{x}}_k\cdot(\ddot{\boldsymbol{x}}_k+\omega_k^2\boldsymbol{x}_k)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_k N_k \frac{m_k}{2}(\dot{x}_k{}^2+\omega_k^2 x_k^2)\right\}.$$

因此，积分后，

$$W=\frac{1}{8\pi}(H^2+E^2)+\sum_k N_k \frac{m_k}{2}(\dot{x}_k^2+\omega_k^2 x_k^2),$$

$$W_{总}=W_{电磁}+W_{物质振子},$$

这是能量守恒定律。

这里，我们也能够再次证明

$$\frac{S}{W}=U=\frac{\partial\omega}{\partial k}$$

是群速。

［证明］ 为了看清这一点，我们首先计算物质振子的能量密度。我们刚证明，它是

$$W_{物质}=\sum_k N_k \frac{m_k}{2}(\dot{x}_k^2+\omega_k^2 x_k^2).$$

然而，现在我们有[16.14]式，所以

$$x_k=\frac{(e/m)_k}{\omega_k^2-\omega^2}E=\frac{(e/m)_k}{\omega_k^2-\omega^2}\mathrm{Re}E_0 e^{-i\omega t-i\delta}. \qquad [16.14']$$

因为我们处理二次式，我们必须首先取复量的实部。当把[16.14′]式代入 $W_{物质}$时，得到

$$W_{物质}=\sum_k N_k \frac{m_k}{2}\frac{(e/m)_k^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}$$

$$\times\{(\mathrm{Re}(-i\omega E_0 e^{-i\omega t-i\delta}))^2+\omega_k^2(\mathrm{Re}E_0 e^{-i\omega t-i\delta})^2\}$$

$$=\sum_k N_k \frac{m_k}{2}\frac{(e/m)_k^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}$$

$$\times\{\omega^2 E_0^2\sin^2(\omega t+\delta)+\omega_k^2 E_0^2\cos^2(\omega t+\delta)\}.$$

对时间平均我们有熟悉的结果

$$\overline{|E|^2}=\frac{1}{2}|E_0|^2,$$

因此得到

$$\overline{W}_{物质}=\frac{1}{2}\sum_k N_k\left(\frac{e^2}{m}\right)_k\frac{\omega_k^2+\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\overline{|E|^2}.$$

这样，如果我们记起$|H|^2=n^2|E|^2$，那得到总的能密度

$$W_{总}=\frac{1}{8\pi}\overline{|E|^2}\left\{1+n^2+4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{\omega_k^2+\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\right\}.$$

根据[16. 16′]式，

$$n^2-1=4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2)},\qquad [16.16']$$

所以在最后的表达式中的和变为

$$4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{\omega_k^2+\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}=n^2-1+4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{2\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}$$

$$=n^2-1+\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n^2-1),$$

代入$\overline{W}$的关系式时，得出

$$\overline{W}=\frac{1}{8\pi}\overline{|E|^2}\left\{2n^2+\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n^2)\right\}.$$

坡印延矢量$\boldsymbol{S}$是

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}],$$

所以

$$|\boldsymbol{S}|=\frac{c}{4\pi}n|\boldsymbol{E}|^2,$$

此外，

$$\frac{c\overline{W}}{|\boldsymbol{S}|}=\frac{1}{2n}\left\{2n^2+\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n^2)\right\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n\omega).$$

另一方面，我们有群速$\boldsymbol{U}=\partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$。在各向同性媒质中，$U=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$，其中$\omega=ck/n$。这样，

$$\frac{c}{U}=c\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n\omega),$$

由此

$$U=|\mathbf{S}|/\overline{W}=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k.\qquad\text{[证毕]}$$

§ 17. 阻尼振子的色散

我们从色散定律的原式形出发

$$n^2-1=4\pi N_0\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}.\qquad[16.16]$$

在$\omega=\omega_0$处这式子有一个奇点。因为这当然不能是物理上发生的情况，我们必须引进阻尼力；因而微分方程[16.10]式现在被写成

$$m\ddot{x}+fx+g\dot{x}=eE,\qquad[17.1]$$

用

$$f=m\omega_0^2\qquad\text{和}\qquad g=m\gamma,$$

它变为

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+\gamma\dot{x}=\frac{e}{m}E.\qquad[17.2]$$

作和[16.11]式以及[16.12]式相同的指数假设，因此得到

$$x(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)=\frac{e}{m}E.\qquad[17.3]$$

然而，这和[16.12′]式完全相同，只是把ω^2换为$\omega^2+i\omega\gamma$。这样，如果到处作这种代换，那么以前所有的结论都依然一样。因此，例如[16.21]式改为

$$R=\frac{4\pi}{3}A\sum_k\frac{e_k^2}{m_k}f_k\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2-i\omega\gamma)},\qquad[17.4]$$

这样，在$\omega=\omega_k$处不再存在极点了。如果用[17.4]式由[16.20]式计算折射率，那么可以看出，折射率是复数。然而，按照先前的讨论，这表示吸收。由[17.4]式可以看出，当分母变为极小时，R^2有一极值(对每个振子)：

$$|\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma|^2=(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2$$

当 $\omega=\omega_m$ 时，是极小。因此，

$$-2(\omega_0^2-\omega_m^2)2\omega_m+2\omega_m\gamma^2=0,$$

所以

$$\omega_m^2=\omega_0^2-\gamma^2/2. \qquad [17.5]$$

如果没有外场作用在振子上，那么它将作自由但阻尼的振动。为了描述这些振动，设

$$x=ae^{-i\omega' t-\mu t+i\delta}. \qquad [17.6]$$

把[17.6]式代入 $E=0$ 的[17.2]微分方程中，得到

$$(-i\omega'-\mu)^2+\omega_0^2+\gamma(-i\omega'-\mu)=0.$$

把它分为实部和虚部。虚部是

$$2i\omega'\mu-i\omega'\gamma=0,$$

所以

$$\mu=\gamma/2. \qquad [17.7]$$

实部(用[17.7]式代入)是

$$-\omega'^2+\gamma^2/4+\omega_0^2-\gamma^2/2=0,$$

由此

$$\omega'^2=\omega_0^2-\gamma^2/4. \qquad [17.8]$$

这样，自由阻尼振动频率相对于振子本征频率 ω_0 稍有移动。

根据线性微分方程理论，把特殊解[17.3]式和齐次方程的通解[17.6]式叠加，我们得到[17.2]式的最普遍解。因而阻尼有这样的后果：即共振时，振动不变为无限大。

考虑振动的能量，我们就得到常数 γ 的物理意义。如所周知，振子的能量 E 是

$$E=\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{f}{2}x^2=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega_0^2x^2).$$

这能量的时间导数是

$$\dot{E}=m\dot{x}(\ddot{x}+\omega_0^2 x).$$

假定为自由振动，那么由[17.2]式，得到

$$\dot{E}=-\gamma m\dot{x}^2.$$

然而，对时间平均（遍及一周期）我们有

$$\overline{\dot{\mathbf{E}}}=\overline{m\dot{x}^2},$$

所以

$$\overline{\dot{E}}=-\gamma\bar{E}, \qquad [17.9]$$

它给出γ的意义。

在金属光学中的应用

我们使用电子在刚性离子点阵中自由地运动的金属模型。这样，在基本微分方程[17.1]中，我们必须令$f=0$，$g\neq0$；于是它变为

$$m\ddot{x}+g\dot{x}=eE. \qquad [17.10]$$

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}=\frac{e}{m}E\cdot \qquad [17.10']$$

在电动力学中，人们考虑在时间上E是常量的情况。作为稳定解($\ddot{x}=0$)，人们得到

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=\boldsymbol{v}=\frac{e}{m\gamma}\mathbf{E}\\&\mathbf{i}=Ne\boldsymbol{v}=\sigma_0\mathbf{E}\\&\sigma_0=\frac{Ne^2}{m\gamma}\end{aligned}\right\}. \qquad [17.11]$$

在光学中，当然也必须考虑$\ddot{x}$。用下面的方法得到[17.10′]式的解。在先前的所有方程式中，令$\omega_0=0$，并且忽略E和E'间的修正。那么，如果仍按照本节的普遍方案，用$\omega^2+i\omega\gamma$代换ω^2，由[16.16′]式得到

$$n'^2-1=4\pi N\frac{e^2}{m}\frac{1}{(-\omega^2-i\omega\gamma)}. \qquad [17.12]$$

象金属光学要求那样，折射率 n' 是复数。于是对于金属，光学常数被定义如下(参看[10.2]式)：

$$n'^2=\varepsilon+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

和[17.12]式比较，得到

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon&=1-4\pi N\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega^2+\gamma^2)}\\ \sigma&=N\frac{e^2}{m}\frac{\gamma}{(\omega^2+\gamma^2)}\\ &=\sigma_0\frac{\gamma}{(\omega^2+\gamma^2)}\end{aligned}\right\}. \qquad [17.13]$$

γ 可能和频率有关。理论上只能用量子力学模型确定它。

对于自由电子，阻尼部分地由于和固定离子碰撞产生；这阻尼随密度减小而减小。然而，甚至对于理想气体都存在所谓辐射阻尼，它直接和振子辐射能量这事实有关①。

§ 18. 光的散射

a. 由电动力学得来的基础①

我们从麦克斯韦方程组[16.5]和极化(矢)的附加关系[16.6]式出发。我们设想所有的项都以时间因子 $e^{-i\omega t}$ (就是说，$\partial/\partial t\sim -i\omega$)振动。从而得到(对于真空)

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{curl}\boldsymbol{E}&=i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}\\ \mathrm{curl}\boldsymbol{H}+i\omega\frac{1}{c}\boldsymbol{E}&=-\frac{4\pi i\omega}{c}\boldsymbol{P}\end{aligned}\right\}. \qquad [18.1]$$

用标势和矢势表示，我们有

① 参看 W.泡利，物理学讲义，电动力学。

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{H}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\Phi\\&\mathrm{div}\boldsymbol{A}-i\frac{\omega}{c}\Phi=0\end{aligned}\right\}. \qquad [18.2]$$

由此，得到二阶微分方程。

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\Phi-\frac{\omega^2}{c^2}\Phi=4\pi\mathrm{div}\boldsymbol{P}\\&\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{A}=4\pi i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{P}\end{aligned}\right\}. \qquad [18.3]$$

如果用 c/n 代换 c，并用$\boldsymbol{H}/n$ 代换$\boldsymbol{H}$，(这样麦克斯韦方程组仍然正确)便得到折射率为 n 的媒质的对应公式。那么，由[18.1]式我们有

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}\\&\mathrm{curl}\boldsymbol{H}+\frac{i\omega}{c}n^2\boldsymbol{E}=-\frac{4\pi}{c}i\omega n^2\boldsymbol{P}\end{aligned}\right\} \qquad [18.1']$$

在媒质中，矢势 $\boldsymbol{A}$ 应该是 $\boldsymbol{A}/n$，就是说，我们要求 $\boldsymbol{H}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A}$ 在媒质中也成立。然而，这是任意的；人们可以不同做法。如此，由[18.2]式，

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{H}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A},\qquad \boldsymbol{E}=i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\Phi\\&\mathrm{div}\boldsymbol{A}-\frac{i\omega}{c}n^2\Phi=0\end{aligned}\right\}. \qquad [18.2']$$

如果我们引进缩写 $k=\omega n/c$，那么我们也能把[18.2′]式写成

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{H}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=i\frac{k}{n}\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\Phi\\&\mathrm{div}\boldsymbol{A}-ikn\Phi=0\end{aligned}\right\}. \qquad [18.2'']$$

此外，[18.3]式变为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\Phi+k^2\Phi=4\pi\mathrm{div}\boldsymbol{P}\\&\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=4\pi ikn\boldsymbol{P}=4\pi\frac{ik}{n}\boldsymbol{P}_1\end{aligned}\right\}, \qquad [18.3']$$

其中我们已设

$$\boldsymbol{P}_1=n^2\boldsymbol{P}. \tag{18.4}$$

如果引进赫兹矢 $\boldsymbol{Z}$, 那么, 我们有

$$\mathbf{A}=-ikn\mathbf{Z}, \Phi=-\mathrm{div}\mathbf{Z}. \tag{18.5}$$

此外,

$$\rho_p=-\mathrm{div}\boldsymbol{P} \tag{18.6}$$

(极化电荷密度), 和

$$\nabla^2\mathbf{Z}+k^2\mathbf{Z}=-4\pi\mathbf{P}. \tag{18.7}$$

用 $\boldsymbol{Z}$ 表示的场强是

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=-ikn\mathrm{curl}\mathbf{Z}\\ \boldsymbol{E}&=k^2\mathbf{Z}+\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{Z}\end{aligned}\right\}. \tag{18.8}$$

微分方程[18.7]的解是

$$\mathbf{Z}_P=\int\boldsymbol{P}_Q\frac{e^{ikr}}{r}\mathrm{d}V_Q. \tag{18.9}$$

在波长 λ 与 $\boldsymbol{P}$ 基本上不为零的区域的线度相比小很多的特殊情况下, 得到熟悉的赫兹振子①

$$\left.\begin{aligned}&R\sim|\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q|\\ &\boldsymbol{\Pi}=\int\boldsymbol{P}_Q dV_Q,\quad \boldsymbol{\Pi}_1=n^2\boldsymbol{\Pi}②\\ &\mathbf{Z}_P=\boldsymbol{\Pi}\frac{e^{ikR}}{R}\end{aligned}\right\}, \tag{18.10}$$

其中 P 是场点, Q是源点, $\mathrm{d}V$ 是体积元。用

$$\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_O)}{R},$$

其中 O 是在源区域中适当地选取的点, 我们有

① 参看泡利: 电动力学

② 德文原本中没有"$\boldsymbol{\Pi}_1=n^2\boldsymbol{\Pi}$"这个式子。——中译者注

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= n\left(k^2+\frac{ik}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi}),\\
\boldsymbol{E} &= \frac{e^{ikR}}{R}\left\{\boldsymbol{\Pi}\left(k^2+\frac{ik}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi})\left(-k^2-\frac{3ik}{R}+\frac{3}{R^2}\right)\right\}
\end{aligned}\right\}. \qquad [18.11]
$$

赫兹振子的能量辐射率是

$$
-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}cnk^4|\boldsymbol{\Pi}|^2=\frac{2}{3}cn\left(\frac{\omega}{c}\right)^4|\boldsymbol{\Pi}_1|^2. \qquad [18.12]
$$

b. 洛伦兹理论

在洛伦兹散射理论中，他考虑的是均匀媒质。按照统计力学，发生密度起伏时引起散射。把整个媒质分成体积元，这些体积元比边长为一个波长的立方体小，然而却包含媒质的许多分子。由于这个假设，这理论对于X光是无效的。

如果 N_V 是体积元 V 内的分子数，λ 是波长，那么

$$
N_V\gg 1 \quad 和 \quad V\ll\lambda^3.
$$

统计平均时，有

$$
\overline{\Delta N_V\Delta N_{V'}}=0 \qquad 对于\ V\neq V'.
$$

因而，来源于不同体积元的光强度可以相加。

如果我们用 $\bar{n}$ 表示平均折射率，那么当考虑到起伏时，[18.1′]式变为

$$
\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H}=(\bar{n}^2+\Delta(n^2))\left(-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E}\right), \qquad [18.13]
$$

其中我们已假定，平均说来，媒质是不极化的。然而，起源于 $\Delta(n^2)$ 那部分 $\boldsymbol{E}$ 能写作极化强度；的确，和[18.1′]式比较，这是

$$
\boldsymbol{P}=\frac{1}{4\pi}\frac{\Delta(n^2)}{\bar{n}^2}\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{P}_1=\frac{1}{4\pi}\Delta(n^2)\boldsymbol{E}. \qquad [18.14]
$$

然而，按照[18.12]公式，体积 V 辐射能量：

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2cn}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\frac{1}{16\pi^2}V^2|\boldsymbol{E}|^2\overline{[\Delta(n^2)]^2}.$$

这是因为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{P}V$。把强度表达式

$$I=\frac{c}{4\pi}n|\boldsymbol{E}|^2,$$

引进最后的公式中，于是得到

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{6\pi}\frac{\omega^4V^2}{c^4}I\overline{(\Delta n^2)^2}. \qquad [18.15]$$

我们假定散射媒质的折射率和 1 只相差很小；这时，我们能够忽略$\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}$间的改正，并且可以使用[16.16]式。我们把非起伏项归并到常数 α 中，那么我们有

$$\bar{n}^2-1=\alpha N_V/V, \qquad [18.16]$$

$$\Delta(n^2)=\alpha\frac{\Delta N_V}{V},$$

$$\overline{(\Delta(n^2))^2}=\frac{\alpha^2}{V^2}\overline{(\Delta N_V)^2}, \qquad [18.17]$$

代入[18.15]式，得到

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=I\frac{1}{6\pi}\frac{\omega^4}{c^4}\alpha^2\overline{(\Delta N_V)^2}. \qquad [18.18]$$

[18.18]式给出单位时间从体积 V 被散射的能量。考虑一根光线，其强度在间隔 $\mathrm{d}x$ 中的损失，无疑地必须正比于在那间隔中被散射的能量。所以，容易看出

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}V, \qquad [18.18']$$

由此式，从[18.18]式，得

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{6\pi}\frac{\omega^4}{c^4}\alpha^2\frac{I}{V}\overline{(\Delta N_V)^2}. \qquad [18.19]$$

习惯上引进散射系数 s 并且把[18.16]式给出的 α 表达式代入[18.19]式中，由此得到

$$-\frac{dI}{dx}=sI, \qquad [18.20]$$

其中

$$s=\frac{8\pi^3}{3}(\bar{n}^2-1)^2\frac{1}{\bar{N}^2}\frac{1}{\lambda_0^4}\frac{\overline{(\Delta N_V)^2}}{V},$$

其中已用了缩写 $\bar{N}\equiv N_V/V$。

从统计力学(起伏理论)得到公式①

$$\overline{(\Delta N_V)^2}=\frac{kT}{(-\partial p/\partial V)_{N_V,T}(V/N_V)^2}, \qquad [18.21]$$

或者

$$\frac{\overline{(\Delta N_V)^2}}{N_V}=\frac{\bar{N}kT}{-V(\partial p/\partial V)_{N_V,T}}.$$

代人散射系数的方程，得到

$$s=\frac{8\pi^3}{3}\frac{(\bar{n}^2-1)^2}{\lambda_0^4}\left(\frac{kT}{-V(\partial p/\partial V)_{N_V,T}}\right). \qquad [18.22]$$

对于理想气体

$$-V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{N_V,T}=\bar{N}kT,$$

所以对于这些气体，散射系数是

$$s=\frac{8\pi^3}{3}\frac{(\bar{n}^2-1)^2}{\bar{N}\lambda_0^4}. \qquad [18.23]$$

公式[18.23]可用于确定阿伏伽德罗数。此外，我们看到短波较长波更强烈地被散射；天空的蓝色便是这事实的结果。

c. X光的散射

我们假定波长比原子的尺度小。那么，从电子上就得到不相干散射。令 S 是单位时间，单位体积中被散射的能量。那么我们有(运动电荷的辐射②)

---

① 参看泡利，物理学讲义：统计力学。

② 参看泡利，电动力学。

$$S=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{v}^2NZ, \qquad [18.24]$$

其中N代表单位体积中的原子数，Z是每个原子中的电子数，v是电子的速度。

现在，光的频率比原子中电子的本征频率大得多。这样，我们设ω_0（和ω_k）等于零。这是假定电子（几乎）是自由的结果。对于这样的电子，

$$m\dot{v}=eE. \qquad [18.25]$$

把[18.25]式和入射强度的关系，$I=(c/4\pi)\mathbf{E}^2$，代入[18.24]式：

$$S=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}INZ. \qquad [18.26]$$

散射系数为$s=S/I$（由[18.20]式中的定义连同[18.18′]式直接得到这结果）。所以，

$$s=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2NZ. \qquad [18.27]$$

现在，N可以用密度ρ，分子量M，和阿伏伽德罗数A表示：

$$N=\rho A/M.$$

代入[18.27]式，然后除以密度，那么，得到**质量吸收系数**σ：

$$\sigma\equiv\frac{s}{\rho}=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{A}{M}Z=0.4\frac{Z}{M}. \qquad [18.28]$$

[18.28]式是汤姆逊确立的。用它可以确定一个原子中的电子数Z。

在[16.16]式中设ω_0等于零得到X光的色散公式：

$$n^2-1=-4\pi NZ\frac{e^2}{m\omega^2}.$$

这表明X光全反射的可能性。

精化. 我们考虑一个其E矢量平行于Z轴的偏振波射到一个原子上。象前面那样，电子被认为是“几乎自由的”；然而，我们

现在要考虑这样的事实，即不是原子中全部 Z 个散射辐射的电子都处在 O 点(原子核的位置)。按照[18.25]式，入射波的效应是产生电子的周期性的加速度。然而，当周期性地加速时，电子产生外传(散射)波，在电磁理论中，计算得在(离电子) r 处的场强 $\boldsymbol{E}_p$ 是

$$\boldsymbol{E}_p=\frac{e}{c^2}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\dot{\boldsymbol{v}}_{\perp}. \qquad [18.29]$$

记号⊥应理解为表示垂直于传播方向(r 方向)的加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 的分量。因此，在 P 点(离电子 r，与 x 轴成 θ 角)的场强 $\boldsymbol{E}_p$ 的量值是

$$E_p=\frac{e^2}{mc^2}\cdot E_e(\boldsymbol{x})\frac{e^{ikr}}{r}\cos\theta.$$

这里，$E_e(\boldsymbol{x})$ 是在 $\boldsymbol{x}$ 点处入射强度的量值；$\boldsymbol{E}_p$ 垂直于散射方向，并且是在这个散射方向和电子振动方向所构成的平面内。如果我们假定 $r\gg|\boldsymbol{x}|$，那么，距离 $R=|\boldsymbol{PO}|$ 变成

$$R=r+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})+\cdots,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示散射方向的单位矢量。所以，我们有(作为近似)

$$E_p=\frac{e^2}{mc^2}\cdot E_e(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{e^{ikR}}{R}\cos\theta.$$

如果我们把入射波的波矢写成

$$\boldsymbol{k}_e=k\boldsymbol{n}_e,$$

那么，在我们的近似中，

$$E_e(\boldsymbol{x})=E_e^0e^{i\boldsymbol{k}_e\cdot\boldsymbol{x}},$$

其中 $\boldsymbol{E}_e^0$ 表示入射波在原点的场强。由此得到

$$E_p=\frac{e^2}{mc^2}\cdot E_e^0\,e^{i(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}\frac{e^{ikR}\cos\theta}{R}. \qquad [18.30]$$

如果我们假定一个原子中存在几个电子，那么我们必须写成

$$E_p=\frac{e^2}{mc^2}E_e^0\sum_n e^{i(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_n}\frac{e^{ikR}}{R}\cos\theta, \qquad [18.30']$$

其中求和遍及 Z 个电子。当然，E_e^0 是以因子 $e^{-i\omega t}$ 在时间上成周期性的：

$$E_e^0 = Fe^{-i(\omega t+\delta)}.$$

因此，入射波强度是

$$I_e = \frac{c}{4\pi}\cdot F^2.$$

从原子散射进立体角 $d\Omega$ 的强度是

$$dI = I_e\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cos^2\theta\,|K|^2 d\Omega. \qquad [18.31]$$

因子

$$K = \sum_n e^{i(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_n} \qquad [18.32]$$

叫做结构因子。

如果入射光的偏振与入射方向和散射方向所定义的平面成一个角度，那么我们必须把它的电场强度矢量分解为平行于和垂直于这个平面的分量。平行于平面的分量按照[18.31]式和[18.32]式被散射；垂直分量的散射按照相同的公式在 $\theta=0$ 时计算。由此我们看到，除在[18.29]式中 $\dot{\boldsymbol{v}}_\perp$ 与 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 相等，就是说，用 1 代替 $\cos\theta$ 之外，这分量的全部计算仍旧和前面一样。

能够计算结构因子量值的平方：

$$|K|^2 = K^*K = \sum_{n,m} e^{i(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_n} e^{-i(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_m}$$

$$= Z + 2\sum_{n<m}\cos[k(\boldsymbol{n}_e-\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m)], \quad [18.33]$$

其中 Z 代表原子中电子的个数。

现在，如果

$$k(\boldsymbol{n}_e-\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m) \gg 1,$$

或

$$(\boldsymbol{n}_e-\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m)\gg\frac{\lambda}{2\pi},\qquad[18.34]$$

那么所有可能的位相作为余弦的宗量出现，因而，其和是很小的。这样，

$$|K|^2\sim Z.\qquad[18.35]$$

如果入射光是非偏振的，那么 $\boldsymbol{E}_e^0$ 的所有方向都是同样可能的，并且入射光强度被等分在两种偏振态中。这样，便能积分[18.31]式了。得到

$$I=\frac{1}{2}I_e\left[\int\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\cos^2\theta Z\mathrm{d}\Omega+\int\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 Z\mathrm{d}\Omega\right]$$

$$=\frac{1}{2}I_e Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left[\int\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta-\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]2\pi,$$

所以

$$I=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 ZI_e,$$

这是先前的[18.27]式。不等式[18.34]在一定的锥内总是不能满足，但该锥随 λ 减小而变小。

注记　按照经典理论以及量子理论，原子中的电子都不是固定的，而是在给定位置处有一定几率。对于一特定电子组态，令此几率是

$$W(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_Z)\mathrm{d}V_1\cdots\mathrm{d}V_Z,$$

且有

$$\int\cdots\int W\mathrm{d}V_1\cdots\mathrm{d}V_Z=1.$$

因此，结构因子应取作统计平均：

$$\overline{|K|^2}=\int\cdots\int W\left|\sum_n e^{i(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_n}\right|^2\mathrm{d}V_1\cdots\mathrm{d}V_Z.\qquad[18.36]$$

如果 W 可能分解为乘积

且有

$$\left.\begin{aligned}W(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_z)=w_1(\boldsymbol{x}_1)w_2(\boldsymbol{x}_2)\cdots w_z(\boldsymbol{x}_z)\\ \int w_i(\boldsymbol{x}_i)\mathrm{d}V_i=1\end{aligned}\right\}\quad[18.37]$$

时，[18.36]式能够简化。如果我们定义缩写

$$F_n=\int w_n(\boldsymbol{x}_n)e^{i(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_n}\mathrm{d}V_n,\qquad[18.38]$$

那么

$$\overline{|K|^2}=\sum_{\substack{n\\ n\neq m}}\sum_m F_nF_m^*+Z=Z+\sum_{n<m}(F_nF_m^*+F_n^*F_m).\quad[18.39]$$

此外，如果 w_n 仅和 r_n 有关，

$$w_n(\boldsymbol{x}_n)=w_n(r_n),$$

就是说，如果 w_n 是球对称的，那么能进一步计算[18.38]式。用 θ 表示散射角，

$$|\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k}|=2k\sin\theta/2,$$

$$\alpha=\measuredangle\{(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k}),\boldsymbol{x}\},$$

$$\cos\alpha=u,$$

所以

$$\mathrm{d}V=r^2\mathrm{d}r\,2\pi\mathrm{d}u,$$

$$F_n=\int w_n(r_n)\frac{\sin(2kr\sin\theta/2)}{kr\sin\theta/2}2\pi r^2\mathrm{d}r.\qquad[18.38']$$

这样，对于球对称分布，F_n 仅是 $(4\pi/\lambda)\sin\theta/2$ 的函数：

$$F_n=F_n\left(\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta/2\right).\qquad[18.38'']$$

这里，如果 λ 再次趋于零(更精确地，$(\sin\theta/2)/\lambda\to\infty$)，那么 F_n 趋于零，因而 $\overline{|K|^2}$ 趋于 Z，这是同前面一样的结果。

在上面考虑中，我们忽略了(按照经典理论)散射时发生的多普勒效应。这种效应使得散射辐射的频率相对于入射辐射的频率稍有移动。

§ 19. 旋光性

a. 唯象理论

物质的旋光性是在偏振光通过物质时，它的振动面发生旋转的特性。这种效应可以描述为：相反方向的圆偏振波的折射率是不同的。(两个等振幅、等频率的反向圆偏振波的叠加显然构成一个线偏振波。)振动面转过的角度 χ 显然是

$$\chi=\frac{\omega}{c}\frac{(n_{+}-n_{-})}{2}l, \qquad [19.1]$$

其中 l 是在旋光性物质中通过的路程，n_{+} 和 n_{-} 是右圆偏振光和左圆偏振光的折射率。

为了发生旋光性，当然必需光学方程对于反射(变换)不再是不变式。这是下列的事实所造成的：某些分子是非镜面对称的(例如，糖溶液，电气石晶体)，因而右圆偏振光和左圆偏振光的本征频率是不同的。

普通矢量(极矢)是反射(变换)下的不变量，反之，轴矢，象普通矢量的矢积和磁场强度矢量之类，却不是。在电动力学① 中已表明，这些矢量实质上是反射(变换)时变号的反对称张量。

我们从电动力学取出下列(麦克斯韦)方程组：

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}&=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}\\ \operatorname{curl}\boldsymbol{B}&=\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{I}_{M}\end{aligned}\right\}, \qquad [19.2]$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{I}_{M}&=\dot{\boldsymbol{P}}+c\operatorname{curl}\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\}. \qquad [19.3]$$

此外，我们假设

---

① W. 泡利：电动力学。

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{P}=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\boldsymbol{E}-\alpha_1\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\\&\boldsymbol{M}=-\alpha_2\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}\\&\alpha_1+\alpha_2=\alpha\end{aligned}\right\}. \tag{19.4}$$

然后得到

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{I}_M=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{E}}-\alpha\mathrm{curl}\dot{\boldsymbol{E}}\\&\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}-4\pi\alpha\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}, \tag{19.5}$$

共中 $\boldsymbol{D}$ 满足关系

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}. \tag{19.6}$$

用这些方程，对于平面波($\nabla\sim i\boldsymbol{k}$, $\partial/\partial t\sim -i\omega$)得到:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{n}\cdot x-\omega t)},$$

其中

$$\kappa=\frac{\omega}{c}n\boldsymbol{n}.$$

用缩写

$$-4\pi\alpha\frac{\omega}{c}n=f, \tag{19.7}$$

得到

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+if\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}. \tag{19.8}$$

现在，如所周知，麦克斯韦方程组导致

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{D}}$$

因而，对于平面波(其中 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}=0$)，得到

$$-n^2\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})=-n^2[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{E}]=\boldsymbol{D},$$

所以用[19.8]式，

$$n^2\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}+if\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}. \tag{19.9}$$

设把 $\boldsymbol{n}$ 沿 z 轴安放($\boldsymbol{n}=\{0,0,1\}$)并且 $\mathbf{E}$ 垂直于它($\boldsymbol{E}=\{E_x, E_y, 0\}$)，则[19.9]式变为

$$\left.\begin{aligned} n^2E_x &= \varepsilon E_x - ifE_y \\ n^2E_y &= \varepsilon E_y + ifE_x \end{aligned}\right\}. \qquad [19.10]$$

通常我们引进 E_{I} 和 E_{II} 代替 E_x 和 E_y:

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{I}} &= E_x + iE_y \\ E_{\mathrm{II}} &= E_x - iE_y \end{aligned}\right\}. \qquad [19.11]$$

于是，

$$\left.\begin{aligned} \{n^2-\varepsilon+f\}E_{\mathrm{I}} &= 0 \\ \{n^2-\varepsilon-f\}E_{\mathrm{II}} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad [19.10']$$

或者，明确地写成(再代入 f①)，

$$\left.\begin{aligned} \left(n^2-\varepsilon-4\pi\alpha\frac{\omega}{c}n\right)E_{\mathrm{I}} &= 0 \\ \left(n^2-\varepsilon+4\pi\alpha\frac{\omega}{c}n\right)E_{\mathrm{II}} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad [19.10'']$$

这新系统有两组解:

(1) $E_{\mathrm{II}}=0$; $E_x=iE_y$, $n=n_{\mathrm{I}}$, [19.12]

$$n_{\mathrm{I}}^2-\varepsilon-4\pi\alpha\frac{\omega}{c}n=0,$$

所以(α 足够地小)

$$n_{\mathrm{I}}\simeq\sqrt{\varepsilon}+2\pi\alpha\frac{\omega}{c}. \qquad [19.12']$$

这产生左圆偏振波(按照[19.12]式)。[19.12']式给出对应的折射率。

(2) $E_{\mathrm{I}}=0$; $E_x=-iE_y$, $n=n_{\mathrm{II}}$.

从类似于前一个计算，得到

$$n_{\mathrm{II}}\simeq\sqrt{\varepsilon}-2\pi\alpha\frac{\omega}{c}.$$

---

① 德文原本是“再代入 f。”——中译者注

因此，由[19.1]式，振动面的旋转变为

$$\chi=-2\pi\alpha\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 l. \qquad [19.1']$$

在我们的理论中，如果我们作下列假设：

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\left(\boldsymbol{B}+\frac{2\pi}{c}\alpha\dot{\boldsymbol{E}}\right),$$

$$W=\frac{1}{8\pi}\{\varepsilon\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2-4\pi\alpha\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\},$$

便正确地得到能量守恒定律。这理论的重要特征是，在基本假设[19.4]式中，我们建立普通矢量和有矢积变换特性的矢量间的关系。

在旋光晶体的情况下，必须使 **D** 和 **E** 的关系更为普遍：

$$D_i=\sum_k\eta_{ik}E_k. \qquad [19.8a]$$

能量守恒要求张量 η_{ik} 是厄米的，

$$\eta_{ki}=\eta_{ik}^*,$$

所以可以把它分解成下面的样式：

$$\eta_{ik}=\varepsilon_{ik}+i\rho_{ik},$$

并且　$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}$，和 $\rho_{ik}=-\rho_{ki}$。

因此，我们能进一步写成

$$\rho_{ik}=\sum_l f_{ik,l}n_l, \qquad [19.8b]$$

并且

$$f_{ki,l}=-f_{ik,l}.$$

也可以用矢积表示[19.8a]式。令 ρ 是和反对称张量 ρ_{ik} 相对应的矢量。就是说，令

$$\rho_i=\sum_{k<l}\varepsilon_{ikl}\rho_{kl},$$

其中 ε_{ikl} 表示熟悉的排列张量：

$$e_{ikl}=\begin{cases}+1, 如果\ i,k,l\ 是\ 1,2,3\ 的偶次排列;\\ -1, 如果\ i,k,l\ 是\ 1,2,3\ 的奇次排列;\\ 0, 如果任何两个指标相等。\end{cases}$$

因此[19.8a]式变为

$$D_j=\sum_k \varepsilon_{jk}E_k-i(\rho\times E)_j$$

并且对应于[19.8b]式的公式成为

$$\rho_i=\sum_k f_{ik}n_k.$$

如令

$$f_{ik}=f\delta_{ik},\ f_{ik,l}=fe_{ikl},\ 和\ \varepsilon_{ik}=\varepsilon\delta_{ik}.$$

由这两公式重新得到各向同性媒质的方程组。

b. 库恩(Kuhn)模型[A-7]

我们取两个耦合振子作为旋光分子模型，下面要把这些振子安排成非反射不变的样式(参看图 19.1)。为了简化计算，我们

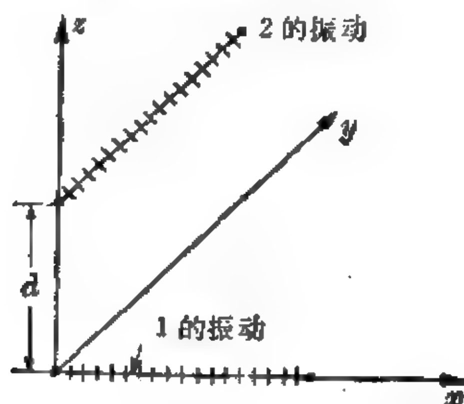


图 19.1

假定两个振子的质量相等。那么，考虑到耦合，系统的势能 $E_势$ 变为

$$E_势=\frac{m}{2}(\omega_1^2x_1^2+\omega_2^2y_2^2+kx_1y_2).$$

对于自由振动(不存在电磁场)我们得到

$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - k y_2 = -(1/m)\partial E_{势}/\partial x_1 ①,$$

$$\ddot{y}_2 = -k x_1 - \omega_2^2 y_2 = -(1/m)\partial E_{势}/\partial y_2.$$

用假设

$$x_1 = A e^{i\omega_0 t}, \quad y_2 = B e^{i\omega_0 t},$$

得到

$$\left.\begin{aligned} x_1(-\omega_0^2+\omega_1^2)+y_2 k=0 \\ x_1 k + y_2(-\omega_0^2+\omega_2^2)=0 \end{aligned}\right\}, \qquad [19.13]$$

如果 x_1 和 y_2 存在非零解，它导致行列式条件：

$$(-\omega_0^2+\omega_1^2)(-\omega_0^2+\omega_2^2)-k^2=0. \qquad [19.13']$$

根 ω' 和 ω'' 将在各个非耦合振子的本征频率 ω_1 和 ω_2 的近邻。这样，我们有展开式：

$$\left.\begin{aligned} \omega'^2 \simeq \omega_1^2 - \frac{k^2}{\omega_2^2-\omega_1^2} \\ \omega''^2 \simeq \omega_2^2 + \frac{k^2}{\omega_2^2-\omega_1^2} \end{aligned}\right\} \qquad [19.14]$$

对于系统的两个本征振动，由[19.13]式得到

$$\left.\begin{aligned} y_2 = \frac{-k}{\omega_2^2-\omega_1^2} x_1 \\ x_1 = \frac{+k}{\omega_2^2-\omega_1^2} y_2 \end{aligned}\right\}. \qquad [19.15]$$

如果我们现在假定光平行于 z 轴入射，那么我们有强迫振动。用和前面相同的假设，代替[19.13]式，我们现在得到

$$\left.\begin{aligned} (-\omega^2+\omega_1^2)x_1 + k y_2 = \frac{e}{m} E_{1x} \\ k x_1 + (-\omega^2+\omega_2^2) y_2 = \frac{e}{m} E_{2y} \end{aligned}\right\}, \qquad [19.16]$$

其中 ω 是光的频率并且一切量都以这频率作周期性变化。于是

---

① 此处德、英文本均有误；中译本中已改正。——中译者注

$$
\left.
\begin{aligned}
&[(-\omega^2+\omega_1^2)(-\omega^2+\omega_2^2)-k^2]x_1 \\
&\qquad\qquad=\frac{e}{m}[(-\omega^2+\omega_2^2)E_{1x}-kE_{2y}] \\
&[(-\omega^2+\omega_1^2)(-\omega^2+\omega_2^2)-k^2]y_2 \\
&\qquad\qquad=\frac{e}{m}[(-\omega^2+\omega_1^2)E_{2y}-kE_{1x}]
\end{aligned}
\right\}
\quad [19.16']
$$

基于[19.13′]式，可以把[19.16′]式中第一个方括号写成

$$
(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2).
$$

因此，得到电偶极矩

$$
\left.
\begin{aligned}
P_x &\equiv \sum_k e x_k = \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \\
&\qquad \times[(-\omega^2+\omega_2^2)E_{1x}-kE_{2y}] \\
P_y &\equiv \sum_k e y_k = \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \\
&\qquad \times[(-\omega^2+\omega_1^2)E_{2y}-kE_{1x}] \\
P_z &\equiv \sum_k e z_k = \text{常数}
\end{aligned}
\right\}.
\quad [19.17]
$$

令 $\boldsymbol{E}$ 为间隔 d 的中央处入射波的电场强度，那么可以展开，并且得到

$$
E_{1x}=E_x-\frac{d}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z}-\cdots,
$$

$$
E_{2y}=E_y+\frac{d}{2}\frac{\partial E_y}{\partial z}+\cdots,
$$

从而

$$
\left.
\begin{aligned}
P_x &= \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\Big[(-\omega^2+\omega_2^2)E_x \\
&\quad -kE_y-k\frac{d}{2}\frac{\partial E_y}{\partial z}-(-\omega^2+\omega_2^2)\frac{d}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z}\Big] \\
P_y &= \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\Big[-kE_x \\
&\quad +(-\omega^2+\omega_1^2)E_y+(-\omega^2+\omega_1^2)\frac{d}{2}\frac{\partial E_y}{\partial z}+k\frac{d}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z}\Big]
\end{aligned}
\right\}.
\quad [19.17']
$$

对于各向异性媒质，不能再进一步简化。然而，对各向同性媒质，我们能对分子的位置求平均并算出 $\boldsymbol{P}$ 的平均值。求原先位置和转过 90°后 $\boldsymbol{P}$ 的算术平均，便得到平行于 x-y 平面的振子全部可能取向的 $\boldsymbol{P}$ 的平均值(用 $\boldsymbol{P}'$ 表示)。

$$\boldsymbol{P}'=\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\left[\left(-\omega^2+\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\right)\boldsymbol{E}\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}\frac{d}{2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}+k\frac{d}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\right].$$

振子轴(和图中 z-轴一致)的可能位置的平均值(用 $\overline{\boldsymbol{P}}$ 表示) 是作为坐标轴的两个反向位置的$\boldsymbol{P}'$ 的算术平均而求得的。通过计算$\boldsymbol{P}'$，并且作代换 $x\to-x, y\to-y, z\to-z$后再计算 $\boldsymbol{P}'$，然后相加，取其和之半，得到

$$\overline{\boldsymbol{P}}=\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}$$
$$\times\left[\left(-\omega^2+\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\right)\boldsymbol{E}+\frac{kd}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{E}\right]. \qquad [19.18]$$

用完全类似的方法，我们现在计算磁偶极矩

$$\boldsymbol{M}\equiv\frac{e}{2c}\sum_k \boldsymbol{x}_k\times\dot{\boldsymbol{x}}_k.$$

磁矩必须和电矩是对同一点的，就是说，是对间隔 d 的中心的。因此，得到

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-\frac{e}{2c}\ \frac{d}{2}\dot{y}_2\\ M_y&=-\frac{e}{2c}\ \frac{d}{2}\dot{x}_1\\ M_z&=0\end{aligned}\right\}. \qquad [19.19]$$

再在间隔 d 的中心附近展开 $\mathbf{E}$，并且代入[19.19]式。(参看上面[19.17]式)。为此，我们仅需进行到泰勒展开式的常数项，因为[19.19]式已对 d 是线性的并且我们一贯略去高阶项。于是，得到

$$
\left.\begin{aligned}
M_x &= -\frac{e}{2c}\frac{d}{c}\dot{y}_2 = -\frac{d}{4c}\dot{P}_y \\
&= -\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \\
&\quad \times[(-\omega^2+\omega_1^2)\dot{E}_y-k\dot{E}_x] \\
M_y &= -\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \\
&\quad \times[(-\omega^2+\omega_2^2)\dot{E}_x-k\dot{E}_y]
\end{aligned}\right\}. \qquad [19.20]
$$

类似于前面的计算，我们必须首先遍及平行于 x-y 平面的振子位置求平均：

$$
\left.\begin{aligned}
M_x' &= -\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \\
&\quad \times\left[-k\dot{E}_x+\frac{1}{2}(\omega_1^2-\omega_2^2)\dot{E}_y\right] \\
M_y' &= -\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \\
&\quad \times\left[-\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\dot{E}_x-k\dot{E}_y\right]
\end{aligned}\right\}, \qquad [19.20']
$$

然后遍及轴的方向求平均：

$$
\overline{\boldsymbol{M}} = \frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}k\dot{\boldsymbol{E}}. \qquad [19.21]
$$

这样，我们看到库恩模型解释了唯象的量 α_1 和 α_2。与[19.4]式比较，得到（对各向同性体）

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}k\frac{d}{2} \\
\alpha_2 &= -\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}k\frac{d}{4} \\
\alpha &= \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}k\frac{d}{4}
\end{aligned}\right\}. \qquad [19.22]
$$

概括起来，我们需要强调，在库恩模型中，振子的耦合和入射波场强的位置依赖性是基本的。把效应分解为来自 $\boldsymbol{P}$ 部分和 $\boldsymbol{M}$

部分不是基本的；引进推迟电矩的概念能够把它们结合起来①，没有考虑两振子间的力的有限传播速度也不是主要的。因为可以证明，如果原子中的力是电性质的，这种效应是 d^2 数量级的了。因而是可以忽略的。我们曾只用两个耦合振子这个事实也不是主要的。关于普遍情况，参看 M. Born，光学(补充书目)。

§ 20. 磁光学

a. 塞曼效应

下面我们将研究在静磁场 $\boldsymbol{H}$ 中质点的振动②。采用洛伦兹力，则得基本方程：

$$\ddot{\boldsymbol{x}}^2+\omega_0^2\boldsymbol{x}=\frac{e}{mc}\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{H}. \qquad [20.1]$$

取 z 轴平行于磁场 $\boldsymbol{H}$，即 $\boldsymbol{H}=\{0,0,H\}$，那么得到

1. 对于 z 分量：

$$\ddot{z}+\omega_0^2 z=0,$$

$$z=Ce^{-i\omega_0 t}.$$

这是用未改变的频率 ω_0 平行于磁场的振动。

2. 对于 x 和 y 分量：

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{eH}{mc}\dot{y},$$

$$\ddot{y}+\omega_0^2 y=-\frac{eH}{mc}\dot{x}.$$

经代换

$$\xi_{\text{I}}=x+iy,$$

$$\xi_{\text{II}}=\xi_{\text{I}}^*=x-iy,$$

得到

---

① 参看 Krooy，学位论文，莱顿(1936)。

② 德文原本为本征振动。——中译者注

$$\ddot{\xi}_{I}+\omega_0^2\xi_{I}=-\frac{eH}{mc}i\dot{\xi}_{I},$$

$$\ddot{\xi}_{II}+\omega_0^2\xi_{II}=+\frac{eH}{mc}i\dot{\xi}_{II}.$$

设

$$\xi_{I}=Ae^{-i\omega' t},$$
$$\xi_{II}=Be^{-i\omega'' t},$$

代入后，有

$$-\omega'^2+\omega_0^2+\frac{eH}{mc}\omega'=0,$$

$$-\omega''^2+\omega_0^2-\frac{eH}{mc}\omega''=0.$$

最后一组方程是严格地可解的，但这里只需把根 ω' 和 ω'' 展开就足够了：

$$\left.\begin{aligned}\omega'&=\omega_0+\frac{eH}{2mc}\\ \omega''&=\omega_0-\frac{eH}{2mc}\end{aligned}\right\}. \qquad [20.2]$$

$eH/2mc$ 叫做**拉莫尔频率**。

所以，在施加磁场后，频率 ω_0 的本征振动分裂为

1. 具有原先频率 ω_0、平行于 H 的一个振动(叫做 π 振动)；

2. 频率对 ω_0 对称地移动了 $eH/2mc$ 的一个右圆偏振和一个左圆偏振，两者都垂直于 H(叫做 σ 振动)，较高频率的振动(对应于 e 的正值)是左圆偏振[A-2]。

对于发射光的电子，这种振动的分裂导致光谱线的分裂。如果垂直于磁场观察，那么，π 振动表现为平行于 H 的线偏振，而 σ 振动表现为垂直于 H 的线偏振。(偏振方向，在这里意指**电矢量**方向。)如果沿磁场方向观察，那么完全看不见 π 振动，而 σ 振动表现为圆偏振，且较高频率的振动是左圆偏振。然而，由此得出放射

辐射的电荷必须是具有负号的，因为，否则，如果观察方向反过来，较高频率振动会和左圆①偏振相关联[A-2]。

由塞曼效应能确定 e/m(包括符号)；这样得到的值与电子的值相同。

上面考虑的简单塞曼分裂不是最普遍的情况。许多谱线表现出几个 π 和 σ 振动的更复杂的分裂；这叫做反常塞曼效应。这种效应起因于电子自旋。然而，相应的理论只能用量子力学处理。

b. 法拉第效应

这种效应是在磁场 $\boldsymbol{H}$ 中媒质内光的振动面的旋转②。左和右圆偏振光的折射率是不同的。

1. 平行于 $\boldsymbol{H}$ 的光线。基本方程变为

$$\ddot{\boldsymbol{x}}+\omega_0^2\boldsymbol{x}=\frac{e}{mc}\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{H}+\frac{e}{m}\boldsymbol{E}. \qquad [20.3]$$

现在，

$$\boldsymbol{P}=Ne\boldsymbol{x},$$

其中N是单位体积中的质点数。我们选取 $\boldsymbol{H}$ 平行于 z 轴。设入射波具有角频率 ω，则进行强迫振动的 $\boldsymbol{x}$ 也具有这个频率。我们作下面的代换：

$$E_x\pm iE_y=E_{\mathrm{I},\mathrm{II}},$$

$$P_x\pm iP_y=P_{\mathrm{I},\mathrm{II}},$$

由此得到

$$\left(-\omega^2-\omega_0^2\pm\frac{eH}{mc}\omega\right)P_{\mathrm{I},\mathrm{II}}=N\frac{e^2}{m}E_{\mathrm{I},\mathrm{II}}.$$

忽略 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}$ 间的改正，我们有[16.7]式：

$$4\pi\boldsymbol{P}=(n^2-1)\boldsymbol{E}.$$

---

① 德文原本为"右"；——中译者注

② 后半句从德文版译出。——中译者注

这样，

$$n_{\rm I}^2-1=-\frac{4\pi(e^2/m)N}{\omega_0^2-\omega^2+(eH/mc)\omega},$$

$$n_{\rm II}^2-1=-\frac{4\pi(e^2/m)N}{\omega_0^2-\omega^2-(eH/mc)\omega},$$

所以

$$n_{\rm I}^2-n_{\rm II}^2=4\pi\frac{e^2}{m}N\left\{\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+(eH/mc)\omega}-\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-(eH/mc)\omega}\right\}.$$

用 ω 不靠近本征频率 ω_0 的假定，可以把它简化(平均值定理)：

$$\left.\begin{aligned} n_{\rm I}^2-n_{\rm II}^2&=-4\pi\frac{e^2}{m}N\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}2\frac{eH}{mc}\omega \\ n_{\rm II}-n_{\rm I}&=4\pi\frac{e^2}{m}N\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\frac{\omega}{n}\frac{eH}{mc} \end{aligned}\right\}. \qquad [20.4]$$

然而，现在根据假设，$n_{\rm I}$ 和 $n_{\rm II}$ 恰好是线偏振入射波的两个圆分量的折射率。这样，按照[19.1]式，振动面旋转的角度 χ 变为

$$\chi=vlH,$$

并且

$$v=\frac{4\pi(e^2/m)N}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\frac{e}{mc^2}\frac{\omega^2}{2n}. \qquad [20.5]$$

v 叫做费尔德(Verdet)常数。对于一个分子内有几个质点的情况，当然，人们必须用下面的和作为 v

$$v=\sum_k\frac{4\pi(e_k^2/m_k)N_k}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\frac{e_k\omega^2}{m_kc^2}\frac{1}{2n}. \qquad [20.6]$$

2. **横入射**. 在这种情况下，会观察到双折射：一个平行于 $\boldsymbol{H}$ 的振动和一个垂直于 $\boldsymbol{H}$ 的振动。

从技术观点，检测法拉第效应比塞曼效应容易得多，虽然从理论观点，塞曼效应比较简单。塞曼效应仅当作在静磁场的影响下的电子自由振动，然而，法拉第效应却是在其它条件相同下发生的强迫振动。

补充书目

M. BORN, *Optik* (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965).

M. BORN and E. WOLF, *Principles of Optics* (Pergamon Press, New York, 1965).

R. DITCHBURN, *Light* (Interscience, New York, 1963).

A. C. HARDY and F. H. PERRIN, *The Principles of Optics* (McGraw-Hill, New York, 1932).

F. A. JENKINS and H. E. WHITE, *Fundamentals of Optics* (McGraw-Hill, New York, 1957).

B. B. ROSSI, *Optics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1957).

附录　英译本主编评注

[A-1]　(§3). 这是用 $\mathrm{d}S=\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}^0$ 由 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0$ 到 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}^0$ 的勒让德变换。而这里的 $\mathrm{d}S$ 是[3.12]式的一个特殊情形。

[A-2]　(§5, §8, §20). $a=0$ 的情况给出顺时针旋转，按习惯称为右圆偏振；$b=0$ 的情况给出逆时针旋转称为左圆偏振。习惯上是按对着光传播方向看所见到的那样来规定旋转指向的。习惯上也规定偏振面是由磁场矢量和波矢量所产生的平面。参看M. Born, *Optik*, p. 24（补充书目)。

[A-3]　(§5). 随着高功率激光器(相干光源)的出现，非线性光学已变成惊心动魄的现实(谐波激发，光-光散射，等)。参看，例如 N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York, 1965)。

[A-4]　(§7). 由 $\alpha_1=\beta_0=\beta_1=0$, $\alpha_0=\sin\varphi$ 的[7.8], [7.8′]式得到

$$u=\text{常数}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{e^{ik(R_{0p}+R_{1p})}}{R_{0p}R_{1p}}\int_{(p-1)a}^{pa}e^{-ik\xi\sin\varphi}\mathrm{d}\xi,$$

其中 a 是台阶的高度，$R_{1p}=R_1+npd$, $R_{0p}=R_0-pd\cos\varphi$，所以，对于很小的 φ, $R_{1p}+R_{0p}\simeq R_1+R_0+pd(n-1)$。(分母可近似地作为 R_0R_1。) 积分并求和得出

$$u=\text{常数}\frac{1-e^{ika\sin\varphi}}{\sin\varphi}\,\frac{1-e^{ikm[d(n-1)-a\sin\varphi]}}{1-e^{ik[d(n-1)-a\sin\varphi]}}.$$

当 $(a/\lambda)\sin\varphi=\pm1$ 时，第一个因子等于零，若 $a\gg\lambda=2\pi/k$，折射角 φ 就被限制为很小值。第二个因子的分子和分母同时为零给出主极大，

$$m[d(n-1)-a\sin\varphi]=N_0\lambda,\quad N_0\ \text{为整数；}$$

$$d(n-1)-a\sin\varphi=N\lambda,\quad N\ \text{为整数。}$$

在 $|(a/\lambda)\sin\varphi|<1$ 区间内，只有一个极大 $N\simeq(d/\lambda)(n-1)$。它旁边的零点位移了 $\Delta\varphi$，由

$$-a\Delta\varphi=\left(\frac{N_0\pm1}{m}-N\right)\lambda=\frac{\lambda}{m}$$

给出。另一方面对应于位移 $\delta\varphi$ 的波长改变由

$$d\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\delta\lambda\cdot a\delta\varphi=N\delta\lambda\cong\frac{d}{\lambda}(n-1)\delta\lambda$$

给出。由条件 $\Delta\varphi=\delta\varphi$ 确定分辨率为

$$A\equiv\frac{\lambda}{\delta\lambda}=md\left(\frac{n-1}{\lambda}-\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right).$$

[A-5] (§15). 情况如图 A.1 所示. 参看 M. Born, *Optik*, p. 238（补充书目）。

[A-6] (§16). 这是托马斯和库恩的 f 数求和定则（参看 M. Born, *Optik*, p. 468, 525, 补充书目）。在量子力学中，f 数求和定则是坐标 x_k 和速度分量 $\dot{x}_l$ 的对易关系 $x_k\dot{x}_l-\dot{x}_lx_k=i\omega_0\delta_{kl}$ 的结果。

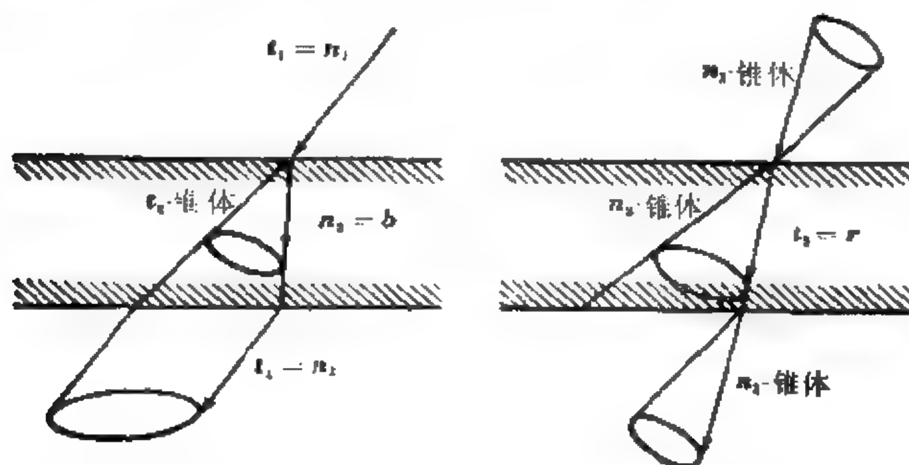


图 A.1

[A-7] (§19). 库恩(W. Kuhn)，物理化学期刊 (*Z. physik. Chemie*)B, 4, 14(1929). 参看 M. Born, *Optik* p. 527（补充书目）。

索　　引

（汉-英）

二　划

三　划

四　划

五　划

七　划

八 划

九　划

十 划

十 一 划

十 二 划

十 三 划

十 四 划

十 五 划

十 六 划